$\boxed{\text{R.T. } 23/02/05}$

1. Aufgabe:

$$\underbrace{\mathcal{Z}[f_{n+2}](z)}_{=z^2(F^*(z)-1-10z^{-1})} - 3\,\underbrace{\mathcal{Z}[f_{n+1}](z)}_{=z(F^*(z)-1)} + 2\,\underbrace{\mathcal{Z}[f_n](z)}_{=:F^*(z)} = 8\,\underbrace{\mathcal{Z}[2^n](z)}_{=\frac{z}{z-2}}$$

Also:

$$(z^2-3z+2)\,F^*(z) - z^2 - 10z + 3z = \frac{8z}{z-2}$$

$$\Rightarrow F^*(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}\Big(\underbrace{\frac{8z}{z-2} + z^2 + 7z}_{=\frac{z^3-2z^2+7z^2-14z+8z}{z-2}}\Big) = z\cdot\frac{z^2+5z-6}{(z-2)(z^2-3z+2)}$$

N.S. von z^2-3z+2: $z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \rightsquigarrow z_1 = 2,\ z_2 = 1$

N.S. von z^2+5z-6: $z_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25+24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \rightsquigarrow z_1 = 1,\ z_2 = -6$

Damit:

$$F^*(z) = z \cdot \frac{z+6}{(z-2)^2}$$

PBZ: $$\frac{z+6}{(z-2)^2} \overset{!}{=} A\,\frac{1}{z-2} + B\,\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{Az-2A+B}{(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -2A+B = 6 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 8 \end{cases}$$

Also:

$$F^*(z) = \frac{z}{z-2} + 8\,\frac{z}{(z-2)^2} = \mathcal{Z}\left[2^n + 8\cdot n\cdot 2^{n-1}\right](z)$$

und

$$\boxed{f_n = 2^n + 4n\cdot 2^n}$$

2. Aufgabe:

Produktansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

Dann
$$\frac{3\,T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Müssen
$$\begin{cases} T'(t) = \lambda/3\, T(t) & (1) \\ X''(x) = \lambda X(x) & (2) \\ X(0) = X(\frac{\pi}{3}) = 0 & (3) \end{cases}$$

lösen.

Setze: $\lambda = -\omega^2$, $\omega > 0$.

Lösungsges der DGL (2):

$$X(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$$

Anpassung an die RW'e (3):

$$X(0) = B \overset{!}{=} 0$$

$$X(\tfrac{\pi}{3}) = A \underbrace{\sin(\omega \tfrac{\pi}{3})}_{} \overset{!}{=} 0$$

$= 0$, falls $\omega \frac{\pi}{3} = k\pi \iff \omega = 3k$

Nicht triviale Lösungen:

$$X_k(x) = A_k \sin(3kx) \quad \text{für } \lambda = -\omega^2 = -9k^2$$

Lösungsges. für T, falls $\lambda = -9k^2$

$$T_k(t) = C_k\, e^{-3k^2 t}$$

Superposition liefert die Lösungen:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(3kx) \cdot e^{-3k^2 t}$$

Lösung des Rand-AWP's:

$$u(x,t) = \sin(3x)\, e^{-3t} + 2 \sin(6x)\, e^{-12t}$$

3. Aufgabe:

Man erhält für $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1](s)$ und $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2](s)$:

$$\begin{cases} F_1(s) + s\,F_1(s) - 8F_2(s) = 0 \\ F_1(s) + \frac{1}{s}F_1(s) + 2s\,F_2(s) - 2 = \frac{3}{s} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} s+1 & -8 & 0 \\ 1+\frac{1}{s} & 2s & 2+\frac{3}{s} \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} s+1 & -8 & 0 \\ s+1 & 2s^2 & 2s+3 \end{array}\right)$$

$$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} s+1 & -8 & 0 \\ 0 & 2s^2+8 & 2s+3 \end{array}\right)$$

Also

$$F_2(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{s^2+4}$$

und

$$\boxed{f_2(t) = \cos(2t) + \frac{3}{4}\sin(2t)}$$

4. Aufgabe:

Es gilt:

$$\begin{cases} u_t(\omega,t) = -\omega^4\, u(\omega,t) + \mathcal{F}(\omega) & (*) \\ u(\omega,0) = 0 \end{cases}$$

Lösungsges. der homog. DGL für festgeh. $\omega \neq 0$

$$u_{hom}(\omega,t) = A_\omega \cdot e^{-\omega^4 t}$$

Ansatz zur Bestimmung einer Partikulärlösung:

$$u_{part}(\omega,t) = B_\omega$$

Einsetzen liefert für $\omega \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \quad 0 = -\omega^4 B_\omega + \mathcal{F}(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad B_\omega = \frac{1}{\omega^4}\mathcal{F}(\omega)$$

Lösungsges. von $(*)$:

$$u_{inhom}(\omega,t) = \frac{1}{\omega^4}\mathcal{F}(\omega) + A_\omega e^{-\omega^4 t}$$

Einsetzen des AW's:

$$u(\omega,0) = \frac{1}{\omega^4}\mathcal{F}(\omega) + A_\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad A_\omega = -\frac{1}{\omega^4}\mathcal{F}(\omega)$$

Also:

$$u(\omega,t) = \frac{1}{\omega^4}\,\mathcal{F}(\omega)\,\left(1 - e^{-\omega^4 t}\right).$$

V.T. 23/02/05

1. Aufgabe:

$$\mathcal{L}\left[t \cdot f''(t) + f(2t)\, e^{-t} + \int_0^t \cos(2(t-\tau))\, f(\tau)\, d\tau \right](s)$$

$$= -\frac{d}{ds} \underbrace{\mathcal{L}[f''(t)](s)}_{= s^2 F(s) - s - 1} + \mathcal{L}[f(2t)](s+1) + \frac{s}{s^2+4} \cdot F(s)$$

$$= -\left(s^2 F'(s) + 2s F(s) - 1\right) + \frac{1}{2} F\left(\frac{s+1}{2}\right) + \frac{s}{s^2+4} F(s)$$

$$= \left(\frac{s}{s^2+4} - 2s\right) F(s) - s^2 F'(s) + \frac{1}{2} F\left(\frac{s+1}{2}\right) + 1$$

2. Aufgabe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n} = \mathcal{Z}[n^2+1](3) - 1$$

$$= \mathcal{Z}[n^2](3) + \underbrace{\mathcal{Z}[1](3)}_{= \frac{3}{2}} - 1$$

$$\mathcal{Z}[n^2](z) = -z \frac{d}{dz} \underbrace{\mathcal{Z}[n](z)}_{= \frac{z}{(z-1)^2}} = -z \frac{(z-1)^2 - z\, 2(z-1)}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n} = \frac{12}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

3. Aufgabe:

$$\mathcal{Z}[f_n](z) = 2 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4}$$

Also

$$f_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ -1 & n = 1,3 \\ 1 & n = 2,4 \\ 0 & n \geq 5 \end{cases}$$

4. Aufgabe:

falsch: i.), ii) und iii)

wahr: iv.)

5. Aufgabe:

Ind. Anf.: $n = 1$

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad ✓$$

Ind. Schritt: $n \rightsquigarrow n+1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{n!} t^n\right](s) = \frac{1}{n} \mathcal{L}\left[\frac{1}{(n-1)!} t \cdot t^{n-1}\right](s)$$

$$= -\frac{1}{n} \frac{d}{ds} \underbrace{\mathcal{L}\left[\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}\right](s)}_{= \frac{1}{s^n} \text{ (Ind. Vor.)}}$$

$$= -\frac{1}{n} \cdot (-n) \frac{1}{s^{n+1}} = \frac{1}{s^{n+1}}. \quad ✓$$

6. Aufgabe:

$$u'(x) = \frac{\partial}{\partial x} v(y(x)) = v'(y(x)) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \, v'(y(x))$$

Also folgt

$$\frac{1}{2} v'(y(x)) = f(x)$$

oder äquivalent

$$\boxed{\frac{1}{2} v'(y) = f(y^2) \quad \text{für } y > 0}$$