Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 04/05
Prof. Dr. Frank 23. Februar 2005

Februar – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie die Lösung der Differenzengleichung

$$\begin{cases} f_{n+2} - 3f_{n+1} + 2f_n = 2^{n+3}, & n \in \mathbb{N}_0, \\ f_0 = 1,\ f_1 = 10. \end{cases}$$

2. Aufgabe 11 Punkte

Bestimmen Sie mit Hilfe des Produktansatzes die Lösung des folgenden Rand-Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} &3u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), && t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{3}, \\ &u(0,t) = u(\tfrac{\pi}{3}, t) = 0, && t \geq 0, \\ &u(x,0) = \sin(3x) + 2\sin(6x), && 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

3. Aufgabe 9 Punkte

Es seien $f_1, f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} &f_1(t) + f_1'(t) - 8f_2(t) = 0, && t \geq 0 \\ &f_1(t) + \int_0^t f_1(\tau)\, d\tau + 2f_2'(t) = 3, && t \geq 0, \\ &f_1(0) = 0,\ f_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie f_2.

4. Aufgabe 10 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine S-Funktion und es bezeichne $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,t) + f(x), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit Anfangswert

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie für $\omega \neq 0$ die Spektralfunktion $U(\omega,t) = \mathcal{F}[u(\cdot,t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx$ mithilfe von $F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$ dar.