Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 05-06
Prof. Dr. Ferus 12. April 2006

April – Klausur (Rechenteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

In einem elektrischen Netzwerk genügen die Stromfunktionen $i_1(t), i_2(t)$ und $i_3(t)$:

$$\begin{cases} i_3'(t) + i_1(t) = u(t) \\ 2i_2(t) + 4q_2(t) - i_1(t) = 0, \end{cases}$$

wobei $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$ und $q_2(t) = \int_0^t i_2(\tau)d\tau$. Das System ist bis zum Zeitpunkt $t = 0$ still $(i_1(t), i_2(t), i_3(t) \equiv 0)$, und die Spannung u wird zu diesem Zeitpunkt als Eingangssignal gelegt.
Was ist dann die Impulsantwort für $i_2(t)$, wenn diese Stromfunktion als Antwort auf das Signal $u(t)$ angesehen wird? Und was ist die entsprechende Übertragungsfunktion?

3. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie eine Reihendarstellung für das folgende Rand-Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} & , (x \in [0,1], t \geq 0) \\ u(x=0;t) = u(x=1;t) = 0 & , \forall t \geq 0 \ \textit{(Randbedingungen)} \\ u(x;t=0) = x - x^2 & , \forall x \in [0;1] \ \textit{(Anfangsbedingungen).} \end{cases}$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Benützen Sie einen Ansatz $u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l r^{|l|} e^{\iota l\phi}$ und Koeffizientenvergleich, um das folgende Randwertproblem zu lösen:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{für } r = \sqrt{x^2+y^2} < 1, \\ u(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 & \text{für } r = \sqrt{x^2+y^2} = 1. \end{cases}$$

Hinweise: der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, und die Formel von Euler ($e^{\iota\phi} = \cos\phi + \iota\sin\phi$) liefert schnell solche Identitäten wie $(\sin\phi)^4 = \frac{1}{8}\cos 4\phi - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{3}{8}$.