Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik Prof. Dr. Ferus

WS 05-06 12. April 2006

April – Klausur (Rechenteil) Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name:					
Neben einem handbeschriebenen A4 B le zugelassen. Taschenrechner und Forn Lösungen sind in Reinschrift auf A4 I bene Klausuren können nicht gewerte	nelsammlunge Blättern abzug	en sind	nicht z	zugelass	sen. Die
Dieser Teil der Klausur umfasst die vollständigen Rechenweg an.	Rechenaufgal	ben. G	eben S	Sie imn	ner den
Die Bearbeitungszeit beträgt eine Stu	ınde.				
Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 beiden Teile der Klausur mindestens 1			*	•	
Korrektur					
	1	2	3	4	Σ

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Mit $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1](s), Y_2(s) = \mathcal{L}[y_2](s)$ hat man:

$$\begin{cases} sY_1(s) - 1 = Y_1(s) + 3Y_2(s) \\ sY_2(s) = 4Y_1(s) + Y_2(s) \end{cases}$$

Aus der 2. Gleichung kommt $Y_2(s)=\frac{4}{s-1}Y_1(s)$, und eine Verwendung dieser Identität in der 1. Gleichung liefert dann:

$$s(s-1)Y_1(s) - (s-1)Y_1(s) - 12Y_1(s) = s-1,$$

so daß

$$\begin{cases} Y_1(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 - 12} \\ Y_2(s) = \frac{4}{(s-1)^2 - 12} \end{cases}$$

Eine Rücktransformation ergibt schließlich:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^t \cosh(2\sqrt{3}t) \\ y_2(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{3}} \sinh(2\sqrt{3}t) \end{cases}$$

In einem elektrischen Netzwerk genügen die Stromfunktionen $i_1(t)$, $i_2(t)$ und $i_3(t)$:

$$\begin{cases} i_3'(t) + i_1(t) = u(t) \\ 2i_2(t) + 4q_2(t) - i_1(t) = 0, \end{cases}$$

wobei $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$ und $q_2(t) = \int_0^t i_2(\tau) d\tau$. Das System ist bis zum Zeitpunkt t = 0 still $(i_1(t), i_2(t), i_3(t) \equiv 0)$, und die Spannung u wird zu diesem Zeitpunkt als Eingangssignal gelegt.

Was ist dann die Impulsantwort für $i_2(t)$, wenn diese Stromfunktion als Antwort auf das Signal u(t) angesehen wird? Und was ist die entsprechende Übertragungsfunktion?

Mit $I_1(s) = \mathcal{L}[i_1](s), I_2(s) = \mathcal{L}[i_2](s)$ und $U(s) = \mathcal{L}[u](s)$ hat man

$$\begin{cases} sI_1(s) + sI_2(s) + I_1(s) = U(s) \\ 2I_2(s) + \frac{4}{s}I_2(s) - I_1(s) = 0, \end{cases}$$

also: $I_1(s) = (2 + \frac{4}{s})I_2(s)$ und

$$\left[(s+1)(2+\frac{4}{s}) + s \right] I_2(s) = U(s),$$

was schon zeigt, daß die Übertragungsfunktion H(s) durch

$$H(s) = \frac{s}{3s^2 + 6s + 4}$$

gegeben ist. Die Impulsantwort h(t) lässt sich dann identifizieren, indem man die Übertragungsfunktion H(s) Rücktransformiert; mit

$$H(s) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + \frac{1}{3}} - \frac{1}{(s+1)^2 + \frac{1}{3}} \right\}$$

sieht man, daß

$$h(t) = \frac{e^{-t}}{3} \left\{ \cos(\frac{t}{\sqrt{3}}) - \sqrt{3}\sin(\frac{t}{\sqrt{3}}) \right\}.$$

Berechnen Sie eine Reihendarstellung für das folgende Rand-Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} &, (x \in [0, 1], t \ge 0) \\ u(x = 0; t) = u(x = 1; t) = 0 &, \forall t \ge 0 \ (Randbedingungen) \\ u(x; t = 0) = x - x^2 &, \forall x \in [0; 1] \ (Anfangsbedingungen). \end{cases}$$

Mit einem Separationsansatz u(x;t) = X(x)T(t) kommt:

$$16\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Die homogene Randbedingungen u(x=0;t)=u(x=1;t)=0 zeigen, daß die gesuchte X-Funktionen von der Art

$$X(x) = A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)$$

sind, wobei $A(\omega) = 0$ und $\omega \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Also kommt, für jede ganze Zahl $k \geq 1$, eine Grundfrequenz $\omega_k = k\pi$ und entsprechenden X-Lösungen von der Form $X_k(x) = B_k \sin(k\pi x)$.

Dementsprechend hat man dann, für jede Grundfrequenz $\omega_k=k\pi$: $\frac{T_k'(t)}{T_k(t)}=-16k^2\pi^2$, also eine T-Lösung von der Form

$$T_k(t) = C_k e^{-16k^2\pi^2 t}$$

Insgesamt haben wir also für jede Grundfrequenz eine Produktlösung von der Gestalt $a_k e^{-16k^2\pi^2t}\sin(k\pi x)$. Eine Überlagerung von solcher Produktlösungen ist dann

$$u(x;t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-16k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x),$$

und jetzt müssen wir nur noch die (a_k) -Koeffizienten bestimmen damit: u(x;0) = x(1-x).

Einsetzen von t = 0 in der obige Summe liefert also:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x) = x(1-x), \quad \forall x \in [0;1],$$

was schon zeigt, daß die (a_k) -Koeffizienten sich als Fourier-Koeffizienten einer ungeraden Funktion identifizieren lassen (nämlich die ungerade Fortsetzung von $x \mapsto x(1-x)$ auf dem Interval [-1;1]). Es kommt:

$$a_k = 2 \int_0^1 (x - x^2) \sin(k\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{8}{k^3 \pi^3}, & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösung ist also:

$$u(x;t) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{8}{(2l+1)^3 \pi^3} e^{-16(2l+1)^2 \pi^2 t} \sin((2l+1)\pi x)$$

Benützen Sie einen Ansatz $u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l r^{|l|} e^{il\phi}$ und Koeffizientenvergleich, um das folgende Randwertproblem zu lösen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & \text{für } r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, \\ u(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 & \text{für } r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1. \end{array} \right.$$

Hinweise: der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, und die Formel von Euler $(e^{\iota \phi} = \cos \phi + \iota \sin \phi)$ liefert schnell solche Identitäten wie $(\sin \phi)^4 = \frac{1}{8} \cos 4\phi - \frac{1}{2} \cos 2\phi + \frac{3}{8}$.

Mit einer Umstellung in Polarkoordinaten stellt man fest, daß die Reel- und Imaginärteilen von $r\mapsto r^l e^{\iota l\phi}$, also $r\mapsto r^l\cos l\phi$ und $r\mapsto r^l\sin l\phi$, Lösungen zur Potentialgleichung $\Delta u=0$ liefern, für jede $l\geq 1$.

Mit der Formel von Euler erhält man

$$(\cos \phi)^4 = \frac{1}{8}\cos 4\phi + \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{3}{8},$$

und es gilt auch:

$$2\cos^2\phi\sin^2\phi = \frac{1}{2}(\sin 2\phi)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos 4\phi).$$

Insgesamt erhält man also für $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$:

$$x^4 + 2x^2y^2 = \cos^4\phi + 2\cos^2\phi\sin^2\phi = -\frac{1}{8}\cos 4\phi + \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{5}{8},$$

was schon zeigt, daß die gesuchte Lösung

$$u(r\cos\phi, r\sin\phi) = -\frac{r^4}{8}\cos 4\phi + \frac{r^2}{2}\cos 2\phi + \frac{5}{8}$$

ist.