Musterlösung Rechenteil

1. Aufgabe

12 Punkte

Aus

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -(\lambda-1)^2(\lambda-4) &= 0 \end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

$$\text{Kern}(A-4E) \;=\; \{(x,y,z)\;:\; x=y=z\}.$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 4$ ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Kern}(A-E) \;=\; \{(x,y,z)\;:\; x=y,\; z=-2y\}.$$

Da der zweifache Eigenwert $\lambda = 1$ nur einen eindimensionalen Eigenraum hat, gegeben durch den Eigenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, muss es noch einen zu $\vec{v}$ linear unabhängigen Hauptvektor $\vec{w}$ geben. Dieser wird berechnet durch Lösen des Gleichungssystems

$$(A-\lambda E)\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{v}\;.$$

Mit Hilfe des Gaußalgorithmus' (u.a. mit Vertauschen der 1. und 3. Zeile) ergibt sich dann als Hauptvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oder um ein Vielfaches des Eigenvektors verschoben).
Somit sind die drei linear unabhängigen Lösungen der DGl.

$$\vec{y}_1(x) = e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{y}_2(x) = e^{1x}\sum_{j=0}^{2-1}\frac{x^j}{j!}(A-1E)^j\vec{v} = e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\vec{y}_3(x) = e^{1x}\sum_{j=0}^{2-1}\frac{x^j}{j!}(A-1E)^j\vec{w} = e^x(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Bezeichnungen: $I_1(s) = \mathcal{L}[i_1](s)$,$I_2(s) = \mathcal{L}[i_2](s)$, $E(s) = \mathcal{L}[e](s)$.
Berechnung von $I_1(s)$:
Anwenden der Laplace-Trafo auf das AWP liefert

$$\begin{cases} 4\frac{1}{s}(I_1(s) + I_2(s)) + sI_1(s) = E(s) \\ 4\frac{1}{s}(I_1(s) + I_2(s)) + I_2(s) = E(s) \end{cases}$$

Auflösen des linearen Gleichungssystems liefert

$$I_1(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 4} E(s).$$

Also lautet die Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{s}{s^2+4s+4}$.
Rücktransformation von $H(s)$:
Es gilt $s^2+6s+8 = (s+2)^2$ Also gilt mit dem Ableitungssatz und $\mathcal{L}[t \cdot e^{-2t}](s) = \frac{1}{(s+2)^2}$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s}{(s+2)^2} \\ &= \mathcal{L}\Big[\frac{d}{dt}\big(t \cdot e^{-2t}\big)\Big] \\ &= \mathcal{L}[e^{-2t} \cdot (1-2t)](s) \end{aligned}$$

und mit $h(t) := e^{-2t} \cdot (1 - 2t)$

$$i_1(t) = (h * e)(t) = \int_0^t (e^{-2(t-u)} \cdot (1 - 2(t-u))) \cdot e(u)\, du.$$

Greensche Funktion: $K(t, u) := e^{-2(t-u)} \cdot (1 - 2(t - u))$.

3. Aufgabe 8 Punkte

Die Integralgleichung ist äquivalent zu

$$(f * f)(t) = e^{-(\frac{t}{3})^2}.$$

Anwenden der $\mathcal{F}$-Trafo liefert

$$\mathcal{F}[f * f](\omega) = \mathcal{F}[e^{-(\frac{t}{3})^2}](\omega) = 3 \cdot \mathcal{F}[e^{-t^2}](3\omega) = 3 \cdot \sqrt{\pi} e^{-\frac{(3\omega)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{F}[f](\omega))^2 = 3 \cdot \sqrt{\pi} e^{-\frac{9\omega^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) \ = \ \pm\sqrt{3} \cdot \pi^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{9\omega^2}{8}}.$$

Es gibt also zwei mögliche Lösungskurven für f. Mit f löst auch $-f$ die Integralgleichung.Wähle $F(\omega) = \sqrt{3} \cdot \pi^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{9\omega^2}{8}}$. Dann folgt, dass

$$
\begin{aligned}
f(-t) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F](t) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{4}}}\mathcal{F}[e^{-\frac{\omega^2}{\frac{8}{9}}}](t) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{4}}} \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{2t^2}{9}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi^{\frac{1}{4}}}\, e^{-\frac{2t^2}{9}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi^{\frac{1}{4}}}\, e^{-\frac{2t^2}{9}}.
$$

4. Aufgabe

10 Punkte

$$
\begin{aligned}
u_t &= 4u_{xx} \quad (0 \le x \le \pi) \\
u(x,0) &= f(x), \\
u_x(0,t) &= 0, \\
u_x(\pi,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t), \implies X(x)T'(t) = 4X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$.

Die linke Seite ist nur von t abhängig, und die rechte nur von x, also sind die beiden Seiten konstant ($= -\lambda$). Das liefert die folgenden DGLn:

$T'(t) = -\lambda 4T(t) \implies T = c_1 e^{-\lambda 4t}$.
$X''(x) = -\lambda X(x),\ X'(0) = X'(\pi) = 0,$

a) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_3 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \implies X \equiv 0$.

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_2 x + c_0,\ X'(x) = c_2$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = 0 \implies X(x) = c_0$.

c) $\lambda = k^2 > 0:\ X(x) = c_2 \cos kx + c_3 \sin kx,\ X'(x) = -c_2 k \sin kx + c_3 k \cos kx,$

$X'(0) = c_3 k = 0\ (k \ne 0) \implies c_3 = 0.$

$X'(\pi) = -c_2 k \sin k\pi = 0\ (k \ne 0) \implies c_2 = 0$ oder $k = n,\ n \in \mathbb{N}$.

Also haben wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung

$$
u_n(x,t) = c_n e^{-(2n)^2 t} \cos nx,
$$

und mit Superposition erhalten wir

$$
u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n)^2 t} \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(2n)^2 t} \cos nx.
$$

Jetzt müssen wir die Koeffizienten c_n so wählen, dass diese Lösung die Anfangsbedingung erfüllt, also Es gilt $1 - 2(\sin x)^2 = \cos 2x$ und damit folgt

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nx \implies c_2 = 1 \quad \text{und} \quad c_n = 0 \text{ für alle } n \neq 2.$$

Mit diesen Koeffizienten bekommen wir die Lösung des AWPs:

$$u(x,t) = e^{-16t} \cos 2x.$$