Musterlösung Verständnisteil

1. Aufgabe 8 Punkte

1.) Sei $\gamma > 0$ beliebig. Es gilt

$$\frac{|f_1(t)|}{e^{\gamma t}} = |\cos t| \cdot e^{-\gamma t + 10 \ln t} \longrightarrow 0, \quad t \to \infty.$$

Da $t \mapsto \frac{|f_1(t)|}{e^{\gamma t}}$ stetig ist, ist $\frac{|f_1(t)|}{e^{\gamma t}}$ gleichmäßig beschränkt. Also existiert ein $C > 0$, so dass gilt

$$|f_1(t)| \le C \cdot e^{\gamma t} \text{ für alle } t \ge 0.$$

Also ist f_1 von exponentieller Ordnung.

2.) Sei $\gamma > 2$ beliebig. Es gilt

$$\frac{|f_2(t)|}{e^{\gamma t}} = \frac{1}{2} \cdot |e^{(2-\gamma)t} - e^{(-2-\gamma)t}| \longrightarrow 0, \quad t \to \infty, \text{ da } \gamma > 2.$$

Da $t \mapsto \frac{|f_2(t)|}{e^{\gamma t}}$ stetig ist, ist $\frac{|f_2(t)|}{e^{\gamma t}}$ gleichmäßig beschränkt. Also existiert ein $C > 0$, so dass gilt

$$|f_2(t)| \le C \cdot e^{\gamma t} \text{ für alle } t \ge 0, \ \gamma > 2.$$

Also ist f_2 von exponentieller Ordnung.

3.) Sei $\gamma > 0$ beliebig. Es gilt

$$\frac{|f_3(t)|}{e^{\gamma t}} = e^{-t^5 - \gamma t} \longrightarrow 0, \quad t \to \infty.$$

Da $t \mapsto \frac{|f_3(t)|}{e^{\gamma t}}$ stetig ist, ist $\frac{|f_3(t)|}{e^{\gamma t}}$ gleichmäßig beschränkt. Also existiert ein $C > 0$, so dass gilt

$$|f_3(t)| \le C \cdot e^{\gamma t} \text{ für alle } t \ge 0.$$

Also ist f_1 von exponentieller Ordnung.

4.) Sei $\gamma > 0$ beliebig. Es gilt

$$\frac{|f_4(t)|}{e^{\gamma t}} = \frac{1}{2}|e^{t^2 - \gamma t} + e^{-t^2 - \gamma t}|.$$

Es ist

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{2}|e^{t^2 - \gamma t} + e^{-t^2 - \gamma t}| = \infty.$$

Insbesondere existiert für ein beliebiges $C > 0$ ein $t \ge 0$ mit

$$|f_4(t)| > C \cdot e^{\gamma t}.$$

Also ist f_4 nicht von exponentieller Ordnung.

2. Aufgabe

7 Punkte

1. Weg: Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m)$. Damit folgt für $m \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(m + \frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2m+1)!}{2^{2m+1} \cdot m!}.$$

Eingesetzt in die Reihendarstellung liefert das

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 2^{2m+1} \cdot m!}{m! \cdot \sqrt{\pi}(2m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

2. Weg: Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \sin(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+\frac{1}{2}} \\ &\longrightarrow 0, \qquad x \to 0. \end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cdot \sin(x)$ beschränkt. Außerdem gilt

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \sin(x)\right)' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sin x + \sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \cos x$$

und

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \sin(x)\right)'' &= \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{-\frac{5}{2}} \cdot \sin x - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos x \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos x - \sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \sin x \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL liefert das

$$\begin{aligned} & x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y \\ =\ & \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin x - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x \ - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin x \\ & -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin x + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin x - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{x\pi}} \cdot \sin x \\ =\ & 0. \end{aligned}$$

Da $J_{1/2}(x)$ die einzige Lösung der zugehörigen Bessel-DGL ist, deren Grenzwert für $x \to 0$ beschränkt ist, muss gelten

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \sin x.$$

3. Aufgabe 7 Punkte

Es ist $P_1(x) = x$ und $Q_1(x) = \frac{1}{2}x \cdot \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1$. Daraus folgt $P_1'(x) = 1$ und

$$\begin{aligned} Q_1'(x) &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}x\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{x}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

und es ist

$$\det\begin{pmatrix} P_1(0) & Q_1(0) \\ P_1'(0) & Q_1'(0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Also sind sie linear unabhängig.

4. Aufgabe 6 Punkte

i) richtig
ii) falsch
iii) falsch

5. Aufgabe 6 Punkte

Mit dem Ansatz $u(x,t) = X(x) + Y(y)$ folgt $u_{xyx}(x,y) = 0$ und $u_{yyy}(x,y) = Y'''(y)$. Einsetzen in die DGL liefert

$$Y'''(y) = 0 \;\Rightarrow\; Y(y) = c_1y^2 + c_2y + c_3 \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Also folgt $u(x,t) = X(x)+c_1y^2+c_2y+c_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und X einer beliebigen differenzierbaren Funktion.

6. Aufgabe 6 Punkte

z.B. $u_{yy} = 0$.