Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 06
Prof. Dr. Bärwolff 11. Oktober 2006

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 6 Punkte

Welche der folgenden Funktionen sind S-Funktionen, welche nicht?

$$f_1(t) = e^{-\frac{1}{1+x^2}}$$
$$f_2(t) = e^{-1-x^2}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe 7 Punkte

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion von exponentieller Ordnung.

- Beweisen Sie, dass dann auch $t \cdot f(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung ist.
- Beweisen Sie den Multiplikationssatz der Laplacetransformation:

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[tf(t)](s) \text{ für } s \in \mathbb{C} \text{ mit genügend großem Realteil.}$$

- Zeigen Sie mit Hilfe des Multiplikationssatzes:

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2}, \;\; Re(s) > 0.$$

3. Aufgabe 8 Punkte

Es sei $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ die Gamma-Funktion. Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m)$. Die Reihendarstellung der Besselfunktion

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

liefert Lösungen für die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot \cos x$$

gilt.
Tipp: $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ ist die einzige Lösung der zugehörigen Bessel-DGL, deren Grenzwert für $x \to 0$ unbeschränkt ist.

4. Aufgabe

7 Punkte

Löst eine der beiden Funktionen $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} \cos(\pi e^{x^2-3x}) \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}$ das AWP

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{y}(0) = \vec{0} \ ?$$

5. Aufgabe

6 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung der 2-dimensionalen Schwingungsgleichung

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} & \text{für} & x^2 + y^2 \leq 9, \quad t \geq 0, \\ u(x,y,t) = 2 & \text{für} & x^2 + y^2 = 9, \quad t \geq 0, \\ u(x,y,0) = 2 & \text{für} & x^2 + y^2 \leq 9, \\ u_t(x,y,0) = 2 & \text{für} & x^2 + y^2 \leq 9. \end{array}$$

6. Aufgabe

6 Punkte

Über die drei Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bekannt:

- f_1 ist gerade und 2π-periodisch,
- f_2 ist ungerade und π-periodisch,
- f_3 ist ungerade und 2π-periodisch.

Zu welcher Funktion könnte die Fourierreihe $s(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx)$ gehören? Begründen Sie Ihre Antwort.