Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 21. Februar 2007

1. Aufgabe

8 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(3-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. $\boxed{\textbf{2 P.}}$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

Eigenraum zu $\lambda_{2,3} = 3$ ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. $\boxed{\textbf{3 P.}}$

Für jeden Eigenwert sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich. Damit können wir drei linear unabhängige Lösungen schnell anschreiben:

$$\vec{y}_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{y}_2(t) == \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\vec{y}_3(x) = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Bezeichnungen: $I_n(s) = \mathcal{L}[i_n](s)$ für $n = 1, 2, 3, \quad U(s) = \mathcal{L}[u](s)$.
Anwenden der Laplace-Trafo auf das AWP liefert

$$\begin{aligned} 2I_1(s) + \frac{6}{s} I_2(s) &= U(s) \\ -\frac{6}{s} I_2(s) + 2I_3(s) + 2sI_3(s) &= 0 \\ -I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) &= 0 \quad \boxed{\textbf{3 P.}} \end{aligned}$$

Mit der Laplace-Trafo der Ableitung $i_3'(t)$ wird die Anfangsbedingung $i_3(0) = 0$ korrekt berücksichtigt. **1 P.**

Auflösen des linearen Gleichungssystems nach I_3 liefert **4 P.**

$$I_3(s) = \frac{3}{2(s^2 + 4s + 6)} U(s).$$

Nachrichtlich:

$$I_1(s) = \frac{s^2 + s + 3}{2(s^2 + 4s + 6)} U(s), \qquad I_2(s) = \frac{s^2 + s}{2(s^2 + 4s + 6)} U(s)$$

Also hat man für die Übertragungsfunktion: $H(s) = \frac{3}{2(s^2+4s+6)}$. **1 P.**

Für die Impulsantwort $h(t)$ braucht man das Urbild von H unter $\mathcal{L}$. Rücktransformation von $H(s)$ ergibt mit $s^2 + 4s + 6 = (s + 2)^2 + 2$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{3}{2((s + 2)^2 + 2)} \\ &= \frac{3}{2} \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right)\right] \end{aligned}$$

Für die Impulsantwort $h(t)$ hat man also

$$h(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right). \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

$$\begin{aligned} u_t &= 9u_{xx} \quad (0 \le x \le \pi) \\ u(x,0) &= -1 - 2\cos 2x, \\ u_x(0,t) &= 0, \\ u_x(\pi,t) &= 0. \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t), \implies X(x)T'(t) = 9X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$.

Die linke Seite ist nur von t abhängig, und die rechte nur von x, also sind die beiden Seiten konstant ($= -\lambda$). Das liefert die folgenden DGLn:

$T'(t) = -\lambda 9T(t) \quad \implies \quad T = c_1 \mathrm{e}^{-\lambda 9t}$.

$X''(x) = -\lambda X(x),\ X'(0) = X'(\pi) = 0,$ $\boxed{\textbf{2 P.}}$

a) $\lambda < 0:\ X(x) = c_2\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + c_3\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = c_3 = 0 \implies X \equiv 0$. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

b) $\lambda = 0:\ X(x) = c_2x + c_0,\ X'(x) = c_2$. Mit den gegebenen Randbedingungen bekommen wir $c_2 = 0 \implies X(x) = c_0$. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

c) $\lambda = k^2 > 0:\ X(x) = c_2\cos kx + c_3\sin kx,\ X'(x) = -c_2k\sin kx + c_3k\cos kx,$

$X'(0) = c_3k = 0\ (k \neq 0) \implies c_3 = 0.$

$X'(\pi) = -c_2k\sin k\pi = 0\ (k \neq 0) \quad \implies \quad c_2 = 0$ oder $k = n,\ n \in \mathbb{N}, n > 0.$

$\boxed{\textbf{2 P.}}$

Also haben wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung

$$u_n(x,t) = a_n\mathrm{e}^{-(3n)^2t}\cos nx,$$

und mit Superposition und $a_0 := c_0$ erhalten wir

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-(3n)^2t}\cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-(3n)^2t}\cos nx. \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Jetzt müssen wir die Koeffizienten a_n so wählen, dass diese Lösung die Anfangsbedingung erfüllt:

$$-1 - 2\cos 2x = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx$$

Damit folgt

$$a_0 = -1, \quad a_2 = -2 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,2\}.$$

Mit diesen Koeffizienten bekommen wir die Lösung des AWPs:

$$u(x,t) = -1 - 2\mathrm{e}^{-36t}\cos 2x. \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

4. Aufgabe 10 Punkte

Die Laplace-Gleichung innerhalb der punktierten Kreisscheibe wird wegen

$$\Delta\left(r^{|l|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}\right) = (l(l-1)+l-l^2)r^{|l|-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = 0. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

von den Ansatzfunktionen $r^{|l|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}$ für jedes $l \in \mathbb{Z}$ gelöst. Der Ansatz lautet also

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l r^{|l|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Damit bleibt nur noch die Anpassung an die vorgegebene Randfunktion. Es ist

$$y^3 + 2x^2y = r^3(\sin^3\varphi + 2\cos^2\varphi\sin\varphi). \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Die Koeffizienten c_l sind so zu bestimmen, dass für $r = 1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = \sin^3\varphi + 2\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = \cos l\varphi + \mathrm{i}\sin l\varphi$ müssen wir die rechte Seite in die Form "$\cos l\varphi, \sin l\varphi$" bringen:

$$\sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$$
$$\cos^2\varphi\sin\varphi = \sin\varphi - \sin^3\varphi = \frac{1}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi, \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

also ist

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi) + \frac{2}{4}\sin\varphi + \frac{2}{4}\sin 3\varphi = \frac{1}{4}(5\sin\varphi + \sin 3\varphi)$$
$$\Longrightarrow c_{-1} = -\tfrac{5}{8\mathrm{i}}, \quad c_1 = \tfrac{5}{8\mathrm{i}}, \quad c_{-3} = -\tfrac{1}{8\mathrm{i}}, \quad c_3 = \tfrac{1}{8\mathrm{i}}, \quad c_l = 0 \text{ für } l \in \mathbb{Z}\setminus\{-3,-1,1,3\}.$$

Der für u gemachte Ansatz führt dann auf

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = -\tfrac{5}{8\mathrm{i}}r^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\varphi} - \tfrac{1}{8\mathrm{i}}r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \tfrac{1}{8\mathrm{i}}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \tfrac{5}{8\mathrm{i}}r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} = \frac{5r}{4}\sin\varphi + \frac{r^3}{4}\sin 3\varphi. \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

Nachrichtlich:

$$u(x,y) = \frac{5}{4}y + \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{4}y^3.$$