Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 23. Juli 2008

1. Aufgabe

11 Punkte

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Der Eigenwert 2 ist doppelt, der Eigenwert 1 einfach. $\boxed{\textbf{1 P.}}$

Finden eines Hauptvektors zum Eigenwert 1: Jeder Hauptvektor ist Eigenvektor aus dem Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}. \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

Finden von Hauptvektoren zum Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat Rang 1, der homogene Lösungsraum ist zweidimensional :

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Alternative: Den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ kann man fast ablesen. Ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor k zum Eigenwert 2 löst das inhomogene GLS

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich: $k_1 = 1$, $k_2 = k_3$, k_3 beliebig. Also ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ ein geeigneter Hauptvektor. $\boxed{\textbf{4 P.}}$

Hauptvektorlösungen:

$$\vec{y}_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \left(1 + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \left(1 + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

Allgemeine Lösung

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Für $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ folgt aus der DGL

$$(s^2 Y(s) - s \cdot 1 - s^2 \cdot 0) + Y(s) = 2\mathrm{e}^{-s}$$
$$(s^2 + 1)Y(s) - s = 2\mathrm{e}^{-s} \quad \boxed{\textbf{4 P.}}$$

Damit ist

$$Y(s) = \frac{2\mathrm{e}^{-s}}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Es gilt

$$2\mathrm{e}^{-s} \frac{1}{s^2+1} = 2\mathrm{e}^{-s} \mathcal{L}\left[\sin t\right](s) = 2\mathcal{L}\left[u_1(t)\sin(t-1)\right](s) \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$
$$\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}\left[\cos t\right]. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Somit hat man für $y(t)$

$$y(t) = \cos t + 2u_1(t)\sin(t-1). \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

3. Aufgabe
12 Punkte

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) - \frac{1}{4}X(x)T'(t) = 0$
Bedingungen: $X(0) = X(2\pi) = 0$ und $X(x)T'(0) = -8\sin 2x$
Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

Separation:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$
$$T'(t) - 4\lambda T(t) = 0, \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Für $T(t)$ bekommen wir

$$T(t) = c_1 \mathrm{e}^{4\lambda t}. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Fallunterscheidung:

a) $\lambda > 0: \; X(x) = c_2\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_3\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0.$ $\boxed{\textbf{1 P.}}$

b) $\lambda = 0: \; X(x) = c_2 x + c_0$. Mit den gegebenen Randbedingungen $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0.$ $\boxed{\textbf{1 P.}}$

c) $\lambda < 0: \; X(x) = c_2\cos\sqrt{-\lambda}x + c_3\sin\sqrt{-\lambda}x, X(0) = 0 \implies c_2 = 0.$
$X(2\pi) = c_3 \sin 2\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \implies c_3 = 0$ oder $2\sqrt{-\lambda} = n, \; n \in \mathbb{N}, n > 0,$ d.h. $\lambda = -\frac{n^2}{4}$ $\boxed{\textbf{3 P.}}$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ eine Lösung

$$u_n(x,t) = a_n \mathrm{e}^{-n^2 t}\sin\tfrac{n}{2}x, \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

und mit Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-n^2 t}\sin\tfrac{n}{2}x \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Koeffizienten a_n aus Anfangsbedingung bestimmen:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2 a_n)\sin\tfrac{n}{2}x = -8\sin 2x \quad (0 \le x \le 2\pi). \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}.$$

Die Lösung des AWPs

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-16t}\sin 2x. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

4. Aufgabe

8 Punkte

a) Der Kreisrand ist durch $r = 2$ gegeben. Dort ist

$$u_{nm}(2,\varphi) = J_n(j_{n;m})\sin n\varphi = 0, \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

weil $j_{n;m}$ eine Nullstelle von J_n ist.

b) Die Lösung $u(r,\varphi)$ wird als Superposition der $u_{nm}(r,\varphi)$ angeschrieben:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}u_{nm}(r,\varphi) \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$

Dann ist

$$\Delta u = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\Delta u_{nm} = -\frac{1}{4}\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}(j_{n;m})^2 u_{nm}$$

Die Poissongleichung $(*)$ ergibt

$$-\frac{1}{4}\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}(j_{n;m})^2 J_n(\tfrac{1}{2}j_{n;m}r)\sin n\varphi = J_2(\tfrac{1}{2}j_{2;3}r)\sin 2\varphi + 2J_4(\tfrac{1}{2}j_{4;2}r)\sin 4\varphi \quad \boxed{\textbf{2 P.}}$$

und damit

$$A_{23} = -\frac{4}{(j_{2;3})^2}, \quad A_{42} = -\frac{8}{(j_{4;2})^2},$$
$$A_{nm} = 0 \text{ für } (n,m) \notin \{(2,3),(4,2)\}. \quad \boxed{\textbf{3 P.}}$$

Die Lösung $u(r,\varphi)$ lautet also mit dem gemachten Ansatz

$$u(r,\varphi) = -\frac{4}{(j_{2;3})^2}J_2(\tfrac{1}{2}j_{2;3}r)\sin 2\varphi - \frac{8}{(j_{4;2})^2}J_4(\tfrac{1}{2}j_{4;2}r)\sin 4\varphi. \quad \boxed{\textbf{1 P.}}$$