Musterlösung Rechenteil — ITPDG, 08. Oktober 2008

1. Aufgabe

10 Punkte

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Der Eigenwert 0 ist einfach, der Eigenwert 2 doppelt.

Finden eines Hauptvektors zum Eigenwert 0**:** Jeder Hauptvektor ist Eigenvektor aus dem Eigenraum

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Finden von Hauptvektoren zum Eigenwert 2**:**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat Rang 1, der homogene Lösungsraum ist zweidimensional :

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Alternative: Den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ kann man fast ablesen. Ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor k zum Eigenwert 2 löst das inhomogene GLS

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich: $k_2 = 1$, $k_3 = k_1$, k_1 beliebig. Also ist z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ ein geeigneter Hauptvektor.

Hauptvektorlösungen:

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_3(t) = \mathrm{e}^{2t} \left(1 + t \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Allgemeine Lösung

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Für $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ folgt aus der DGL

$$\begin{aligned}
(s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0) + 4Y(s) &= \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s} \\
(s^2+4)Y(s) &= s + \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s} \\
Y(s) &= \frac{1\mathrm{e}^{-2s}}{s(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B_1 s + B_0}{s^2+4} \\
1 = A(s^2+4) + (B_1 s + B_0)s \\
1 = (A + B_1)s^2 + sB_0 + 4A \\
A = \frac{1}{4}, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = -\frac{1}{4} \\
\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}
\end{gathered}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s} - \frac{1}{4}\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4} \\
\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s} &= \mathrm{e}^{-2s}\mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[(t-2)u_2(t)](s) \\
\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+4} &= \mathrm{e}^{-2s}\mathcal{L}[\cos 2t](s) = \mathcal{L}[\cos 2(t-2)u_2(t)](s) \\
\frac{s}{s^2+4} &== \mathcal{L}\left[\cos 2t\right](s)
\end{aligned}$$

Somit hat man für $y(t)$

$$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{4}u_2(t)\left(1 - \cos 2(t-2)\right)$$

3. Aufgabe

12 Punkte

Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) - X(x)T'(t) = X(x)T(T)$
Bedingungen: $X(0) = X(\pi) = 0$ und $X(x)T'(0) = \sin 2x$
Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} = 1$$

Separation:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = 1 + \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$
$$T'(t) + (\lambda + 1)T(t) = 0,$$

Fallunterscheidung für λ:

a) $\lambda > 0$: $X(x) = c_2 \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + c_3 \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$. Mit den gegebenen Randbedingungen $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0$.

b) $\lambda = 0$: $X(x) = c_2 x + c_0$. Mit den gegebenen Randbedingungen $c_2 = c_3 = 0 \implies X(x) = 0$.

c) $\lambda < 0$: $X(x) = c_2 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_3 \sin\sqrt{-\lambda}x$, $X(0) = 0 \implies c_2 = 0$.
$X(2\pi) = c_3 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \implies c_3 = 0$ oder $\sqrt{-\lambda} = n,\ n \in \mathbb{N}, n > 0$, d.h. $\lambda = -n^2$

Mit diesem λ bekommen wir für $T(t)$

$$T(t) = c_1 \mathrm{e}^{-(-\lambda+1)t} = c_1 \mathrm{e}^{-(n^2+1)t}.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ eine Lösung

$$u_n(x,t) = a_n \mathrm{e}^{-(n^2+1)t} \sin nx,$$

und mit Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-(n^2+1)t} \sin nx$$

Koeffizienten a_n aus Anfangsbedingung bestimmen:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-(n^2+1)a_n)\sin nx = \sin 2x \quad (0 \le x \le \pi).$$

$$a_2 = -\frac{1}{5} \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}.$$

Die Lösung des AWPs

$$u(x,t) = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5t}\sin 2x.$$

4. Aufgabe

8 Punkte

a) Für die Randpunkte von $\mathcal{Q}$ gilt $x=0$ oder $x=2$ oder $y=0$ oder $y=2$. Damit ist

$$\begin{aligned} u_{mn}(0,y) &= \sin(0)\sin(n\pi y) = 0, \\ u_{mn}(x,0) &= \sin(m\pi x)\sin(0) = 0, \\ u_{mn}(2,y) &= \sin(2m\pi)\sin(n\pi y) = 0, \\ u_{mn}(x,2) &= \sin(m\pi x)\sin(2n\pi) = 0, \end{aligned}$$

weil 0, $2m\pi$ und $2n\pi$ Nullstellen des Sinus sind.

b) Die Lösung $u(x,y)$ wird als Superposition der $u_{mn}(x,y)$ angeschrieben:

$$u(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}u_{mn}(r,\varphi)$$

Dann ist

$$\Delta u = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\Delta u_{mn} = -\pi^2\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(m^2+n^2)u_{mn}$$

Die Poissongleichung $(*)$ ergibt

$$\begin{aligned} &-\pi^2\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(m^2+n^2)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y) \\ &= 2\sin(3\pi x)\sin(4\pi y) + 3\sin(2\pi x)\sin(\pi y) \end{aligned}$$

und damit

$$A_{34} = -\frac{2}{25\pi^2}, \quad A_{21} = -\frac{3}{5\pi^2},$$
$$A_{mn} = 0 \text{ für } (m,n) \notin \{(2,1),(3,4)\}.$$

Die Lösung $u(r,\varphi)$ lautet also mit dem gemachten Ansatz

$$u(x,y) = -\frac{2}{25\pi^2}\sin(3\pi x)\sin(4\pi y) - \frac{3}{5\pi^2}\sin(2\pi x)\sin(\pi y).$$