Musterlösung Verständnisteil — ITPDG, 17. Februar 2010

1. Aufgabe

9 Punkte

Mit TdV:

$$\begin{aligned} y' \mathrm{e}^y &= 1 \\ \int \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y &= \int 1 \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{e}^y &= x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ y &= \ln(x + C), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Anpassung an AW:

$$0 = \ln C \implies C = 1.$$

Also ist eine Lösung

$$y(x) = \ln(1 + x)$$

Diese Lösung ist definiert auf $]-1, \infty[$, dort ist auch die Anfangsstelle 0 enthalten.
Zur Eindeutigkeit: Die rechte Seite e^{-y} wird als Funktion $G(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$ angesehen. G ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Nach dem EES geht damit durch den Punkt $(0, 0)$ genau eine Lösungskurve.
Damit ist die Lösung $y(x) = \ln(1 + x)$ die *einzige* Lösung des AWPs.

2. Aufgabe

9 Punkte

a) $\lambda = -1, 2$, $\mu = 1$: keine Resonanz
$y_{\text{part}}(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^x$

b) $\lambda = \pm 3\mathrm{i}$, $\mu = \pm\mathrm{i}$: keine Resonanz
$y_{\text{part}}(x) = A \sin x + B \cos x$

c) $\lambda = 1$ doppelt; $\mu = 1$: Resonanz, $\mu = 0$: keine Resonanz
$y_{\text{part}}(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)\mathrm{e}^x + (Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)$

3. Aufgabe

8 Punkte

Berechnung der Übertragungsfunktion $H(s)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a_{\text{in}}](s) \cdot H(s) &= \mathcal{L}[a_{\text{out}}](s) \\
\frac{1}{s^2} \cdot H(s) &= \frac{2}{s^3} \\
H(s) &= \frac{2}{s}
\end{aligned}$$

Für die Antwort $b_{\text{out}}(t)$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[b_{\text{out}}](s) &= \mathcal{L}[b_{\text{in}}](s) \cdot H(s) \\
&= \frac{2}{s^3} \cdot \frac{2}{s} \\
&= \frac{4}{s^4} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{s^4}
\end{aligned}$$

schließlich

$$b_{\text{out}}(t) = \frac{2}{3} t^3$$

4. Aufgabe

6 Punkte

Zum Beispiel: Ein (in unseren Augen sehr) naheliegender Vorschlag ist $u_{\text{p}}(x,t) = \sin 2x$.

Dann lauten die „korrigierten“ Rand- und Anfangswertbedingungen, die dann an u_{hom} zu stellen sind:

$$\begin{aligned}
u_{\text{hom}}(0,t) = u_{\text{hom}}(\pi,t) &= 0 \text{ für } t \geq 0 \\
u_{\text{hom}}(x,0) &= \sin x - \sin 2x \text{ für } x \in [0,\pi]
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

8 Punkte

a) Falsch.

Es müsste 0 eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein; dann aber fehlt x, und x^4 ist zuviel.

b) Wahr.

Wenn f beschränkt ist, ist sie erst recht von exponentieller Ordnung und erfüllt die „Generalvoraussetzung“ lt. Skript.

c) Wahr.

Die FT ist ebenfalls ungerade, und ungerade Funktionen verschwinden an der Stelle 0.

d) Wahr.

Dass die Koeffizientenfunktionen nicht-linear sind, spielt keine Rolle.