Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 10/11
Penn-Karras 4. März 2011

Februar – Klausur
ITPDG für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkten erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

8 Punkte

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGl-Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \vec{y}$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \vec{y}\,, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe

11 Punkte

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mithilfe der Laplace-Transformation:

$$x'' + 4x = 8u_3(t)(t-3)\ , \quad x(0) = 1\ , \quad x'(0) = 0\ .$$

$u_3(t)$ ist die Sprungfunktion mit dem Sprung in $t = 3$.

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle (reellen) Lösungen der Differentialgleichung

$$u_t = 2tu_{xx}$$

der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$, die periodisch in x sind.

b) Welche der in a) bestimmten Lösungen erfüllen weiterhin die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0\ ?$$

c) Lösen Sie das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} &u_t = 2tu_{xx} \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ &u(x,0) = 5\sin(3\pi x) + 2\sin(\pi x)\ . \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

a) Geben Sie eine lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten, reellen Koeffizienten an, die die Lösung

$$y(t) = 5 + e^{-t}\cos(2t)$$

hat. Wählen Sie die Ordnung der Differentialgleichung so niedrig wie möglich. Begründen Sie Ihre Wahl der Ordnung.

b) Geben Sie ein Fundamentalsystem zu dieser DGl an.

5. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen Sie mit Begründung die richtigen Ansatzfunktionen zur Ermittlung einer partikulären Lösung der folgenden DGLen. Die Lösungen müssen nicht berechnet werden.

a) $y'' - 3y' + 2y = \cos t$ *b)* $y'' - y = te^t$ *c)* $y'' + y' = 1 + 3e^{2t}$

6. Aufgabe 12 Punkte

a) Berechnen Sie folgende Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u^2 e^{t-u} du\right](s)\ .$$

b) Betrachtet werden drei Funktionen $f, g, h : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Dabei sei $h(t) = t$ und $g = h * f$. Zeigen Sie

$$g''(t) = f(t)\ .$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt $g(0) = 0 = g'(0)$.

c) Berechnen Sie folgende Fourier-Transformierte:

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{9t^2 + 6t + 2}\right](\omega)\ .$$

Hierzu können Sie die Beziehung

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

benutzen.

Hinweise: a) Faltungssatz, b) Laplace-Transformation, c) Rechenregeln der Fouriertransformation.