Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik
Dozent Prof. D. Hömberg
Assistentin Dr. C. Papenfuß

WS 2011

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure
Lösung Klausur Februar

Rechenteil

1. Aufgabe

8 Punkte

Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

liest man direkt ab:

$$\lambda_1 = 5 \;, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4 \;.$$

Zu $\lambda_1 = 5$ findet man den Eigenvektor $\vec{v_1}$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;.$$

Zu $\lambda_2 = 4$ findet man einen Eigenvektor $\vec{v_2}$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

Zum doppelten Eigenwert benötigt man einen Hauptvektor $\vec{v}_3$. Der Hauptvektor kann iterativ bestimmt werden:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(oder beliebige Vielfache des Eigenvektors dazuaddiert.)

Damit lautet die allgemeine Lösung des DGl-Systems:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2} + C_3 e^{\lambda_2 t} \left(\vec{v_3} + t \vec{v_2} \right)$$

$$= C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Auswerten der Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_3 &= 2 \\ C_2 + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 &= -1 \ . \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$\vec{x}(t) = -e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{4t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad .$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Laplace-Transformation der DGl ergibt (mit $\mathcal{L}\left[y(t)\right](s) =: Y(s)$)

$$\begin{aligned} y'' + y' - 2y = \delta_3(t) \ , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1 \\ s^2 Y - 1 + sY - 2Y = e^{-3s} \\ Y(s^2 + s - 2) = e^{-3s} + 1 \\ Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + s - 2} + \frac{1}{s^2 + s - 2} \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners sind 1 und -2.
Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + B(s-1)}{(s-1)(s+2)} \\ \Rightarrow \quad 1 = A(s+2) + B(s-1) \\ \Rightarrow \quad 1 = B(-2-1) = -3B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow \quad 1 = A(1+2) = 3A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Damit

$$Y(s) = e^{-3s}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2}\right) + \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} \ .$$

Rücktransformation ergibt die gesuchte Lösung

$$y(t) = u_3(t)\left(\frac{1}{3}e^{t-3} - \frac{1}{3}e^{-2(t-3)}\right) + \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ in die partielle DGL liefert

$$\begin{aligned} X''(x)T(t) = t^2 X(x)\dot{T}(t) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{t^2\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die DGl für $X(x)$ hat periodische Lösungen nur falls $\lambda \leq 0$.
Fall 1: $\lambda = 0$

$$X(x) = C_0 + C_1 x$$

Periodisch nur für $C_1 = 0$

$$\begin{aligned} X(x) = C_0 \ , \quad T(t) = C_2 \\ u(x,t) = C_0 C_2 = C \ . \end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda < 0$

$$X(x) = C_3 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \ .$$

und die DGL für $T(t)$ wird integriert:

$$\frac{t^2\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda$$

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\lambda}{t^2} \Rightarrow \quad \ln|T(t)| = -\lambda\frac{1}{t} + C_5$$

$$T(t) = C_6 e^{-\lambda\frac{1}{t}}$$

$$u(x,t) = e^{-\lambda\frac{1}{t}}\left(C_7 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_8 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right)$$

b) Fall 1: $\lambda = 0$
Auswerten der Randbedingung $u(0,t) = 0 = u(2\pi,t)$:

$$u(0,t) = C = 0$$

und es bleibt nur die triviale Lösung $u(x,t) = 0$
Fall 2: $\lambda < 0$

$$u(0,t) = 0 = u(2\pi,t) \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 = X(2\pi)$$

$$X(0) = C_7 \cos\left(\sqrt{-\lambda}0\right) + C_8 \sin\left(\sqrt{-\lambda}0\right) = C_7 = 0 \ .$$

$$X(2\pi) = C_8 \sin\left(\sqrt{-\lambda}2\pi\right) = 0$$

Nichttriviale Lösungen findet man nur für $C_8 \neq 0$, d.h. $\sqrt{-\lambda}2\pi = n\pi \ , \ n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2}{4}$:

$$u(x,t) = C_n e^{\frac{n^2}{4}\frac{1}{t}} \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

und durch Superposition

$$u(x,t) = \sum_n C_n e^{\frac{n^2}{4}\frac{1}{t}} \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \ .$$

c) Auswerten der Anfangsbedingung:

$$u(x,1) = \sin(2x) + 2\sin(4x) = \sum_n C_n e^{\frac{n^2}{4}} \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow C_4 e^{\frac{4^2}{4}} = 1 \ , \ C_8 e^{\frac{8^2}{4}} = 2$$

$$\Rightarrow C_4 = e^{-4} \ , \ C_8 = 2e^{-16} \ , \quad C_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 4,8$$

Damit ist die Lösung des Randanfangswertproblems

$$u(x,t) = e^{-4}e^{\frac{4}{t}} \sin\left(\frac{4}{2}x\right) + 2e^{-16}e^{\frac{16}{t}} \sin\left(\frac{8}{2}x\right) \ .$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

5 Punkte

Es ist

$$16t^2 + 8t + 2 = (4t+1)^2 + 1$$

Mit dem Skalierungssatz folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{2}{16t^2+8t+2}\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{2}{(4t+1)^2+1}\right](\omega)\\ &= \frac{2}{4}\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+1)^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{4}\right).\end{aligned}$$

und mit dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+1)^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{4}\right) &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{i\frac{\omega}{4}}\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{e}^{i\frac{\omega}{4}-\frac{|\omega|}{4}}\ .\end{aligned}$$

5. Aufgabe

7 Punkte

Wende die Laplace-Trafo auf die Integralgleichung an:

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(t-\tau)f(\tau)d\tau] = \mathcal{L}[f*f(t)](s) = \mathcal{L}[\frac{t^3}{6}e^t](s)\ .$$

Mit Faltungssatz folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{(s-1)^4} \quad &\Rightarrow\\ \mathcal{L}[f(t)](s) = \pm\frac{1}{(s-1)^2}&\end{aligned}$$

Die Rücktransformierte ist

$$f(t) = \pm te^t\ .$$

6. Aufgabe

8 Punkte

a) falsch
Es gibt Lösungen der Produktform $u(x,t) = X(x)T(t)$.

b) falsch
Zu $e^t \sin t$ gehören als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $1 \pm i$. Der Faktor t zeigt, dass die Nullstellen doppelt sind. Also hat das charakteristische Polynom mindestens 4 Nullstellen. Damit muss die DGl mindestens 4. Ordnung sein.

c) wahr
Die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind erfüllt: Die rechte Seite $\cos(x^2y^2)$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar.

d) falsch
Der Anfangswert $y = 1$ liegt nicht im Definitionsbereich der rechten Seite $\ln(y-2)$. Das AWP hat daher keine Lösung.

7. Aufgabe

10 Punkte

Die charakteristische Gleichung der DGl lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + \alpha = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$$

(a) Damit man eine Schwingung erhält, müssen die Eigenwerte komplex sein, d.h.

$$1 - \alpha < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1 \ .$$

Es muss also $\alpha \in]1, \infty[$ sein. Die allgemeine reelle Lösung lautet dann

$$x(t) = e^{-t}\left(C_1 \cos(\sqrt{\alpha-1}t) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha-1}t)\right) \ .$$

(b) Unbeschränkt wachsende Lösungen erhält man, wenn mindestens ein $\Re(\lambda) > 0$ ist. Hier muss $\lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda > 0$ sein, d.h.

$$-1 + \sqrt{1-\alpha} > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha < 0$$

Es muss also $\alpha \in]-\infty, 0[$ sein. Die allgemeine reelle Lösung lautet dann

$$x(t) = C_1 e^{-1+\sqrt{1-\alpha}} + C_2 e^{-1-\sqrt{1-\alpha}} \ .$$