Musterlösung

Rechenteil

1. Aufgabe

13 Punkte

a) Wir bilden das charakteristische Polynom

$$\det\begin{pmatrix} 11-\lambda & 5 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (11-\lambda)(1-\lambda)+25 = \lambda^2-12\lambda+36 = (\lambda-6)^2,$$

welches die doppelte Nullstelle $\lambda = 6$ besitzt.

$$\begin{pmatrix} 11-\lambda & 5 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert $a = -b$ für jeden Eigenvektor und damit den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ein weiterer linear unabhängiger Eigenvektor existiert wegen dieser Bedingung nicht.
Wir ermitteln deswegen einen Hauptvektor als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 11-\lambda & 5 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

z.B.

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt das Fundamentalsystem

$$\left\{ e^{6t}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}, e^{6t}\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \Big) \right\}$$

und die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \Big)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Wir versuchen eine Variation der Konstanten, d.h. wir wählen den Ansatz

$$\vec{z}(t) = c_1(t)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen c_1 und c_2 dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{1+t^2} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

genügen müssen. Invertieren und integrieren liefert uns

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \int e^{-3t} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^t}{1+t^2} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^t}{1+t^2} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^t}{1+t^2} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t^2} - e^t \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \begin{pmatrix} \arctan t - e^t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, und damit

$$\vec{z}(t) = (\arctan t - e^t + k_1)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t + k_2)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die unbekannten Konstanten bestimmen wir aus der Anfangsbedingung:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{z}(0) = (k_1 - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten $k_1 = 0$, $k_2 = 5$, also

$$\vec{z}(t) = (e^t \arctan t - e^{2t}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t + 5)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Wir wenden die Laplace-Transformation an, um folgende Umformungen zu erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\big[\sinh(t) * \big(\exp(t) f'(t)\big)\big](s) &= \mathcal{L}[t^2](s)\\
\mathcal{L}[\sinh(t)](s) \cdot \mathcal{L}\big[\exp(t) f'(t)\big](s) &= \mathcal{L}[t^2](s)\\
\frac{1}{s^2-1} \cdot \mathcal{L}\big[\exp(t) f'(t)\big](s) &= \frac{2}{s^3}\\
\frac{1}{s^2-1} \cdot \mathcal{L}[f'](s-1) &= \frac{2}{s^3}\\
\frac{1}{s^2-1} \cdot \big(\mathcal{L}[f'](\sigma)\big)\Big|_{\sigma=s-1} &= \frac{2}{s^3}\\
\frac{1}{s^2-1} \cdot \big(\sigma\mathcal{L}[f](\sigma) - f(0)\big)\Big|_{\sigma=s-1} &= \frac{3}{s^3}\\
\frac{1}{s^2-1} \cdot \big(\sigma\mathcal{L}[f](\sigma) - \underbrace{f(0)}_{=0}\big)\Big|_{\sigma=s-1} &= \frac{2}{s^3}\\
\frac{1}{s^2-1} \cdot (s-1)\mathcal{L}[f](s-1) &= \frac{2}{s^3}\\
\frac{1}{s+1}\mathcal{L}[f](s-1) &= \frac{2}{s^3}\\
\mathcal{L}[f](s-1) &= 2\frac{s+1}{s^3} = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3}\\
\mathcal{L}[\exp(t) f(t)](s) &= \mathcal{L}[2t](s) + \mathcal{L}[t^2](s)\\
\mathcal{L}[\exp(t) f(t)](s) &= \mathcal{L}[2t + t^2](s)
\end{aligned}
$$

Nun wenden wir die Umkehr der Laplacetransformation an und erhalten unter Zuhilfenahme des Satzes von Lerch
die Lösung

$$f(t) = e^{-t}(2t + t^2).$$

3. Aufgabe 7 Punkte

Setzt man den gegebenen Produktansatz in die partielle Differentialgleichung ein, erhält man die Beziehung

$$yX(x)Y(y) = X''(x)Y(y) + X(x)Y'(y)$$

also

$$X(x)\big(yY(y) - Y'(y)\big) = X''(x)Y(y)$$

und für $X(x)Y(y) \neq 0$

$$\frac{yY(y) - Y'(y)}{Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

wegen der Unabhängigkeit der beiden Seiten der Gleichung.
Umstellen impliziert

$$\begin{aligned} yY - Y' &= \lambda Y \\ X'' &= \lambda X \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} Y' &= (y - \lambda)Y \\ X'' &= \lambda X \end{aligned}$$

.

Verständnisteil

4. Aufgabe

8 Punkte

a) Wir betrachten die offene Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. $G(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$ ist auf dieser Menge stetig differenzierbar. Weiter ist der Anfangspunkt $(1, \frac{1}{3}) \in M$. Damit ist das gegebene Problem nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eindeutig lösbar.

b) Es ist

$$\begin{aligned} y' &= (x^m u)' \\ &= m x^{m-1} u + x^m u' \\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} \\ &= \left(\frac{x^m u}{x}\right)^2 + \frac{x^m u}{x} \\ &= x^{2m-2} u^2 + x^{m-1} u, \end{aligned}$$

also wegen $x \neq 0$

$$u' = x^{m-2} u^2 + (1-m) x^{-1} u.$$

Damit die rechte Seite von der Form $f(u)g(x)$ ist, muß

$$m = 1$$

sein. Es folgt die Gleichung

$$u' = \frac{u^2}{x}.$$

Die Anfangsbedingung transformiert zu

$$y(1) = 1 \cdot u(1) = u(1) = \frac{1}{3}.$$

c) Die Trennung der Variablen führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ -\frac{1}{v} &= \log x + C \\ v &= -\frac{1}{\log x + C}, \end{aligned}$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Die Konstante ermittelt man aus der Anfangsbedingung $v(1) = -\frac{1}{C} = \frac{1}{3}$ zu $C = -3$, und erhält $v(x) = -\frac{1}{\log x - 3}$.

5. Aufgabe

6 Punkte

Weil f eine Schwartzfunktion ist, existiert $\mathcal{F}[f]$.
Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathrm{si} * f](\omega) &= \mathcal{F}[\mathrm{si}](\omega) \cdot \mathcal{F}[f](\omega) \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{si}](\omega) \cdot \mathcal{F}[f](\omega) \\ &= 2\pi \cdot \mathrm{r}_1(\omega) \cdot \mathcal{F}[f](\omega)\end{aligned}$$

Ist nun $|\omega| > 1$, dann ist

$$\mathcal{F}[\mathrm{si} * f](\omega) = 2\pi \cdot \mathrm{r}_1(\omega) \cdot \mathcal{F}[f](\omega) = 0,$$

weil $\mathrm{r}_1(\omega)$ dort verschwindet.
Also ist $\mathrm{si} * f$ bandbegrenzt mit Bandbreite 1.

6. Aufgabe

6 Punkte

Das vollständige Fundamentalsystem enthält wegen der Faktoren t die Menge $\{e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}\}$.
Die ersten beiden Elemente korrespondieren zu einer doppelten Nullstelle $\lambda = 1$ des charakteristischen Polynoms, die beiden anderen zur doppelten Nullstelle $\lambda = -1$.
Damit ist das charakteristische Polynom

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$$

bereits vom Grad 4.
Ausmultiplizieren ergibt

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2 = (\lambda^2 - 1)^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$$

Man ersetzt nun formal λ^k durch $y^{(k)}$ und erhält die gesuchte Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

7. Aufgabe

10 Punkte

a) Richtig. Wegen der Linearität sind $f_1 \pm f_2$ Lösungen der Differentialgleichung. $c_a(f_1+f_2)+c_b(f_1-f_2) = (c_a+c_b)f_1+(c_a-c_b)f_2 = 0$, also wegen der linearen Unabhängigkeit von f_1 und f_2 $c_a = c_b = -c_b = 0$, also sind die Funktionen $f_1 \pm f_2$ linear unabhängig.

b) Richtig. Jede Schwartzfunktion s ist beschränkt, daher gilt $|s(t)| \leq C_s \leq C_s e^t$. s ist also von exponentieller Ordnung und daher laplacetransformierbar.

c) Richtig. Offenbar ist die Ableitung wieder unendlich oft differenzierbar. Deren Ableitung der Ordnung n ist aber die Ableitung der Ordnung $n+1$ der gegebenen Schwartzfunktion, von der per Definition klar ist, dass ihr Produkt mit jedem Polynom beschränkt bleibt.

d) Falsch. Die Laplacetransformierte der (periodischen) Sinusfunktion ist $\frac{1}{1+s^2}$ und nicht periodisch.

e) Falsch. Die Gleichung $y''' = t^2$ besitzt die Lösung $y(t) = \frac{t^5}{60}, \deg y = 5 > 3$.