Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 2013/2014
Dozentin: Dr. G. Penn-Karras
Assistentin: Dr. C. Papenfuss 11. April 2014

April – Klausur Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen, sowie die Laplace-Tabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	7	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$y'' + 4y' + 3y = \delta_3(t)\ , \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = -1\ .$$

Dabei bezeichnet $\delta_3(t) = \delta(t-3)$ die in $t = 3$ zentrierte Diracfunktion.

2. Aufgabe 12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gestalt $u(x,y) = X(x)Y(y)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = -u\ ,$$

die periodisch und nicht-konstant in x sind.

b) Welche der Lösungen aus a) sind außerdem periodisch und nicht-konstant in y?

c) Welche der Lösungen aus b) lösen das Randwertproblem

$$u_{xx} + u_{yy} = -u\ ,$$

$$u(0,y) = 0\ , \quad u(2\pi,y) = 0\ , \quad u(x,0) = 0\ ?$$

3. Aufgabe 8 Punkte

Bestimmen Sie aus den gegebenen vektorwertigen Funktionen

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} \\ t \end{pmatrix}\ , \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}\ , \quad \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} \\ 2t \end{pmatrix}\ , \quad \vec{x}_4(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem (eine Lösungsbasis) zu dem Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t^3} \\ -t & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \vec{x}\ .$$

Begründen Sie Ihre Wahl.

Verständnisteil

4. Aufgabe — 8 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} \ .$$

5. Aufgabe — 9 Punkte

Geben Sie jeweils eine möglichst einfache Ansatzfunktion zur Bestimmung einer partikulären Lösung der folgenden Differentialgleichungen an. Begründen Sie Ihren Ansatz. Die Differentialgleichungen sollen nicht gelöst werden.

$$a)\ y'' + y' - 2y = e^t + t^2 \ , \quad b)\ y'' + 2y' = t\cos t \ , \quad c)\ y''' + y'' = t^2 \ .$$

6. Aufgabe — 7 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung $y(t)$ der folgenden Integralgleichung

$$\int_0^t \tau y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = t - \sin t \ .$$

Hinweis: Wenden Sie die Laplace-Transformation an.

7. Aufgabe — 6 Punkte

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{9t^2+12t+5}\right](\omega) \ .$$

Hierzu können Sie benutzen

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

$$\mathcal{F}[f(\frac{t}{a})](\omega) = |a|\mathcal{F}[f(t)](a\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)](\omega)$$