Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik WS 2013/2014

# Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure
# Lösung Klausur April

## Rechenteil

## 1. Aufgabe — 10 Punkte

Laplace-Transformation der DGl ergibt (mit $\mathcal{L}\left[y(t)\right](s) =: Y(s)$)

$$\begin{aligned}
y'' + 4y' + 3y = \delta_3(t)\ , \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) &= -1 \\
s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) &= e^{-3s} \\
s^2Y(s) - s + 1 + 4sY(s) - 4 + 3Y(s) &= e^{-3s} \\
Y(s)(s^2+4s+3) - s - 3 &= e^{-3s} \\
Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2+4s+3} &+ \frac{s+3}{s^2+4s+3}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} &= \frac{A(s+3)+B(s+1)}{(s+1)(s+3)} \\
\Rightarrow \quad 1 &= A(s+3) + B(s+1) \\
s=-3: \quad 1 = B(-2) \quad \Leftrightarrow \quad B &= -\frac{1}{2} \\
s=-1: \quad 1 = 2A \quad \Leftrightarrow \quad A &= \frac{1}{2}\ , \\
\Rightarrow \frac{1}{s^2+4s+3} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= e^{-3s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}\right) + \frac{1}{s+1} \\
&= e^{-3s}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-t}](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-3t}](s)\right) + \mathcal{L}[e^{-t}](s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}[u_3(t)e^{-(t-3)}](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[u_3(t)e^{-3(t-3)}](s) + \mathcal{L}[e^{-t}](s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}[u_3(t)e^{-t+3}](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[u_3(t)e^{-3t+9}](s) + \mathcal{L}[e^{-t}](s)\ .
\end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt die gesuchte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}u_3(t)e^{-t+3} - \frac{1}{2}u_3(t)e^{-3t+9} + e^{-t} \ .$$

## 2. Aufgabe 13 Punkte

a)

$$u_{xx} + u_{yy} = -u \ ,$$

Ansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ einsetzen in die DGl liefert für $X(x)Y(y) \neq 0$

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = -X(x)Y(y)$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

d.h. die gewöhnlichen DGls:

$$X''(x) = \lambda X(x) \ , \quad Y''(y) = (-1-\lambda)Y(y)$$

Lösungen, die periodisch in $x$ und nicht konstant sind, gibt es nur für $\lambda < 0$. Die Lösung $X(x)$ lautet dann

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x) \ .$$

Für $Y(y)$ müssen Fälle unterschieden werden:
Fall I: $-1-\lambda < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > -1$:

$$Y(y) = C_3 \cos(\sqrt{\lambda+1}y) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda+1}y) \ .$$

$$u(x,y) = \left(C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)\right)\left(C_3 \cos(\sqrt{\lambda+1}y) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda+1}y)\right) \ .$$

Fall II: $-1-\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1$:

$$Y(y) = C_5 y + C_6 \ .$$

$$u(x,y) = \left(C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)\right)(C_5 y + C_6) \ .$$

Fall III: $-1-\lambda > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < -1$:

$$Y(y) = C_7 e^{\sqrt{-\lambda-1}y} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda-1}y} \ .$$

$$u(x,y) = \left(C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)\right)\left(C_7 e^{\sqrt{-\lambda-1}y} + C_8 e^{-\sqrt{-\lambda-1}y}\right) \ .$$

b) Es bleiben nur die Lösungen aus Fall I: $\lambda > -1$,

$$u(x,y) = \left(C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)\right)\left(C_3 \cos(\sqrt{\lambda+1}y) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda+1}y)\right) .$$

c)

$$u_{xx} + u_{yy} = -u \ ,$$

$$u(0,y) = 0 \ , \quad u(2\pi,y) = 0 \ , \quad u(x,0) = 0 \ .$$

Auswerten der Randbedingungen
$u(0,y) = 0$ , $u(2\pi,y) = 0$ , $u(x,0) = 0$.
Es folgt $X(0) = 0$ , $X(2\pi) = 0$ , $Y(0) = 0$.

$$X(0) = 0 = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}0) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}0) = C_1 \Rightarrow \quad X(x) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x) \ .$$

$$X(2\pi) = 0 = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) \ .$$

Nichttriviale Lösungen gibt es für

$$\begin{aligned} \sqrt{-\lambda}2\pi &= n\pi \ , n \in \mathbb{N} \ , \\ \lambda &= -\left(\frac{n}{2}\right)^2 \ , \\ \Rightarrow \quad X(x) &= C_2 \sin(\frac{n}{2}x) \ . \end{aligned}$$

Wegen $\lambda > -1$ bleibt nur $n = 1$, d.h.

$$X(x) = C_2 \sin(\frac{1}{2}x) \ .$$

Auswerten der Randbedingung $Y(0) = 0$:

$$\begin{aligned} Y(0) = 0 &= C_3 \cos(0) + C_4 \sin(0) = C_3 \\ Y(y) = C_4 \sin(\sqrt{\lambda+1}y) &= C_4 \sin(\sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}y) \end{aligned}$$

Man findet also Lösungen der Form

$$\begin{aligned} u(x,y) = C_2 \sin(\frac{1}{2}x) C_4 \sin(\sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}y) &= C_2 \sin(\frac{1}{2}x) C_4 \sin(\sqrt{\frac{3}{4}}y) \\ &= \bar{C} \sin(\frac{1}{2}x) \sin(\sqrt{\frac{3}{4}}y) \end{aligned}$$

## 3. Aufgabe 8 Punkte

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} \\ t \end{pmatrix}$ ist eine Lösung:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t^3} \\ -t & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t^3} \\ -t & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{t} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{t^2} + \frac{2t}{t^3} \\ -\frac{2t}{t} + \frac{3t}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t^2} \\ 1 \end{pmatrix} = \dot{\vec{x}}_1(t) \ .$$

$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t^3} \\ -t & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t^3} \\ -t & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} + \frac{2}{t^3}t^2 \\ -t + \frac{3}{t}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix} = \dot{\vec{x}}_4(t) \ .$$

$\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_4(t)$ sind linear unabhängig, da

$$\det W(t) = \det\left(\vec{x}_1(t)\vec{x}_4(t)\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & 1 \\ t & t^2 \end{pmatrix} = t \neq 0 \quad \forall t > 0 \ .$$

Damit bilden $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_4(t)$ ein Fundamentalsystem.

## Verstaendnisteil

## 4. Aufgabe 8 Punkte

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \ , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1$ bzw. $\lambda_2$ sind

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Hauptvektor $\vec{x}_3$ zum doppelten Eigenwert kann iterativ bestimmt werden:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{x}_3 = \vec{x}_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

## 5. Aufgabe 9 Punkte

a)

$$y'' + y' - 2y = e^t + t^2$$

Erstansatz:

$$y_{p1}(t) = Ae^t + Bt^2 + Ct + D \ .$$

Das charakteristische Polynom der homogenen DGl hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ \lambda_1 = 1 \ , &\quad \lambda_2 = -2 \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_1 = 1$ liegt bei $e^t$ Resonanz mit einer einfachen Nullstelle vor. Daher lautet der Ansatz

$$y_p(t) = Ate^t + Bt^2 + Ct + D$$

b)

$$y'' + 2y' = t \cos t$$

Erstansatz:

$$y_{p1}(t) = (At + B)(\cos t + C \sin t) \ .$$

Das charakteristische Polynom der homogenen DGl hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda &= \lambda(\lambda + 2) = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \ , &\quad \lambda_2 = -2 \ . \end{aligned}$$

Keine Resonanz. Daher lautet der Ansatz

$$y_p(t) = (At + B)(\cos t + C \sin t)$$

c)

$$y''' + y'' = t^2$$

Erstansatz:

$$y_{p1}(t) = At^2 + Bt + C \ .$$

Das charakteristische Polynom der homogenen DGl hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 &= \lambda^2(\lambda + 1) = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \ , &\quad \lambda_3 = -1 \ . \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ liegt Resonanz mit einer doppelten Nullstelle vor. Daher lautet der Ansatz

$$y_p(t) = t^2(At^2 + Bt + C)$$

## 6. Aufgabe **7 Punkte**

Anwenden der Laplacetransformation und Faltungssatz liefert (mit $\mathcal{L}[y(t)](s) =: Y(s)$ )

$$\begin{aligned}
\cos t * (ty(t)) &= t - \sin t \\
\mathcal{L}[\cos t * (ty(t))](s) = \mathcal{L}[\cos t](s)\mathcal{L}[ty(t)](s) = \mathcal{L}[t - \sin t](s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} \\
\frac{s}{s^2+1}\left(-\frac{d}{ds}Y(s)\right) &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} \\
-\frac{d}{ds}Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3} - \frac{1}{s} &= \frac{1}{s^3} \\
Y(s) &= \frac{1}{2s^2} \ .
\end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt die gesuchte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2}t \ .$$

## 7. Aufgabe **6 Punkte**

Es ist

$$9t^2 + 12t + 5 = (3t+2)^2 + 1$$

Mit dem Skalierungssatz folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{2}{9t^2+12t+5}\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{2}{(3t+2)^2+1}\right](\omega) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+2)^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right).
\end{aligned}$$

und mit dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+2)^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right) &= \frac{2}{3}e^{2i\frac{\omega}{3}}\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\pi\cdot e^{i\frac{2\omega}{3}-\frac{|\omega|}{3}} \ .
\end{aligned}$$