Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2014
Dozentin: Dr. G. Penn-Karras
Assistentin: Dr. C. Papenfuss 2. Oktober 2014

Oktober – Klausur Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen, sowie die Laplace-Tabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 8 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = 3e^t \ .$$

Verwenden Sie **nicht** die Laplacetransformation.

2. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$y'' + 3y' - 4y = 50u_1(t)e^{t-1} \ , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = -4 \ .$$

Dabei ist $u_1(t)$ die Sprungfunktion mit Sprung an der Stelle $t = 1$.

3. Aufgabe 12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$t^2 u_t + u_{xx} = 0$$

der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$, die periodisch und nicht konstant in x sind.

b) Welche der in a) bestimmten Lösungen erfüllen weiterhin die Bedingungen

$$u(0,t) = u(2\pi, t) = 0 \ ?$$

c) Bestimmen Sie die Lösung des Rand-Anfangswert-Problems

$$\begin{aligned} t^2 u_t + u_{xx} &= 0 \\ u(0,t) = u(2\pi, t) &= 0 \\ u(x,1) = 2\sin(x) + \sin(3x) & \ . \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 7 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} \ .$$

5. Aufgabe 12 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

a) Alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^6$$

sind monoton wachsend.

b) Das Anfangswertproblen

$$y' = y^2 \ , \quad y(0) = 1$$

hat eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

c) Es gibt eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y''(x) + y'(x) = x^2 e^{-x}$, die die Form $y(x) = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C)$ mit reellen Zahlen A, B, C hat.

d) Die Fourier-Transformierte einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

6. Aufgabe 11 Punkte

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2; \\ t^2, & 2 \leq t \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass für stetiges $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ und $g(t) := \int_0^t \tau f(t-\tau) d\tau$ gilt:

$$g''(t) = f(t)$$

Hinweis: Wenden Sie die Laplace-Transformation an.
$g(0) = 0$ und $g'(0) = 0$ müssen gegebenenfalls gezeigt werden.