Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 16

G. Penn-Karras 29. Juli 2016

Juli – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$.

2. Aufgabe 9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung $x(t)$ für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 12(t-2)u_2(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2.$$

Dabei steht $u_2(t)$ für die Sprungfunktion, die bei $t = 2$ von Null auf Eins springt.

Benutzen Sie ohne Nachweis die Partialbruchzerlegung

$$\frac{12}{s^2(s^2-s-2)} = \frac{3}{s} - \frac{6}{s^2} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s-2}.$$

3. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2tu = 0, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5\sin 3x + 2\sin 4x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das reelle Anfangswertsproblem

$$y' + \mathrm{e}^x(1 + y^2) = 0, \quad y(0) = 0.$$

a) Ermitteln Sie eine Lösung dieses Anfangswertsproblems zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

b) Zeigen Sie mit einem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass dieses Anfangswertsproblem genau eine Lösung hat.

Hinweis: Es gilt

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan t + C.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie eine stetige Funktion $f(t)$ von exponentieller Ordnung, die die Integralgleichung

$$\int_0^t \mathrm{e}^{t-u}\, f(u)\,\mathrm{d}u = t\,\mathrm{e}^{2t}$$

erfüllt.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Gegeben sei ein DGL-System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ im $\mathbb{R}^2$ mit einer konstanten (2×2)-Matrix A. Dann gilt: Wenn die Matrix A nicht invertierbar ist, besitzt dieses DGL-System nur die triviale Lösung $\vec{y}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$,

b) Die Funktionen 1 und e^t bilden für die Lösungen der reellen DGL $y'' - y' = 0$, $t \in \mathbb{R}$, ein Fundamentalsystem.

c) Für die DGL $y'' + y = t\sin t$ ist $y(t) = (At + B)\sin t + (Ct + D)\cos t$ der richtige Ansatz für eine partikuläre Lösung.

d) Alle reellen Lösungen $u(x, y)$ der Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

lassen sich in der Form $u(x, y) = X(x)Y(y)$ mit geeigneten Funktionen X und Y schreiben.

e) Die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{1+|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ist eine S-Funktion (eine Schwartz-Funktion).