Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 16
G. Penn-Karras 06. Oktober 2016

Oktober – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe
9 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ für das Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$.

2. Aufgabe
9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung $x(t)$ für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \delta_2(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 3.$$

Dabei steht $\delta_2(t)$ für die bei $t = 2$ konzentrierte Dirac-Funktion.

3. Aufgabe
12 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{(1+2t)} \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = 0, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5\sin 3x + 2\sin 4x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe

11 Punkte

In Abhängigkeit von einer reellen Zahl α ist das folgende reelle Anfangswertsproblem (AWP) gegeben:

$$y' + \frac{1}{2}(1-y^2)\sin x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha.$$

a) Zeigen Sie mit einem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass das AWP für jeden Wert von α genau eine Lösung hat.

b) Ermitteln Sie für $\alpha = 0$ die Lösung des AWPs zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

c) Geben Sie für $\alpha = 1$ die Lösung des AWPs zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich an.

Hinweise: Die Unteraufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.
Es gilt

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C.$$

5. Aufgabe

9 Punkte

a) Berechnen Sie

i) $\mathcal{L}[\,t\,\sin(6t)\,](s)$ und

ii) $t * \cos(3t)$ (Faltung im Sinne der Laplace-Transformation).

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int_0^\infty t\,\sin(6t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t,$

ii) $\displaystyle\int_0^\pi (\pi - u)\,\cos(3u)\,\mathrm{d}u.$

Hinweise: Bitte benutzen Sie die Laplace-Tabelle. Falls nötig dürfen Sie ohne Nachweis die folgende Beziehung benutzen:

$$\frac{1}{s(s^2+a^2)} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+a^2}\right).$$

Bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ das DGL-System $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}$.
Es gilt: Weil die Systemmatrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die rein imaginären Eigenwerte i und $-$i besitzt, gibt es keine reellen Lösungen außer der trivialen Lösung $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Die Funktionen $2t + 4$ und $-(2 + t)$ bilden für die Lösungen der reellen DGL $y'' = 0$, $t \in \mathbb{R}$, ein Fundamentalsystem.

c) Die reelle Differentialgleichung $y^{(42)} = 0$ wird von jedem Polynom 41. Grades gelöst.

d) Sind für die partielle Differentialgleichung (PDG) im $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

zwei Lösungen $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ gegeben, so ist auch die Summe $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ eine Lösung dieser PDG.

e) Die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

hat endliche Bandbreite.