Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

WS 17/18
26. Februar 2018

Februar – Klausur
Integraltransformationen und
Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Musterlösung Klausur ITPDG, 26. Februar 2018

1. Aufgabe

10 Punkte

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-\lambda) - (-3(2-\lambda) + 2(2-\lambda))$$
$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)(-\lambda) + 3 - 2\right) = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Die Zahl 1 ist ein doppelter Eigenwert, die Zahl 2 ein einfacher Eigenwert.

Berechnung des Eigenraums zum Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Er ist sowieso nur eindimensional.

Berechnung des Eigenraums zum Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Er ist eindimensional. Der Eigenwert 1 hat geometrische Vielfachheit 1.

Wir suchen einen von diesem Eigenraum linear unabhängigen Hauptvektor. Er ist eine partikuläre Lösung $\vec{h}$ der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung ist.

Allgemein gilt

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine Lösung des DGL-Systems ist nun durch

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

gegeben.

2. Aufgabe 10 Punkte

Mit $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ hat man im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}
(s^2Y - 2s + 3) + 3(sY - 2) - 4Y &= \frac{20\mathrm{e}^{-s}}{s} \\
(s^2 + 3s - 4)Y - 2s - 3 &= \frac{20\mathrm{e}^{-s}}{s} \\
Y &= \mathrm{e}^{-s}\frac{20}{s(s^2+3s-4)} + \frac{2s+3}{s^2+3s-4}
\end{aligned}$$

Es ist $s^2 + 3s - 4 = (s + 4)(s - 1)$. Partialbruchzerlegungen:

$$\begin{aligned}
\frac{20}{s(s+4)(s-1))} &= -\frac{5}{s} + \frac{1}{s+4} + \frac{4}{s-1} \\
\frac{2s+3}{(s+4)(s-1)} &= \frac{1}{s+4} + \frac{1}{s-1}
\end{aligned}$$

Somit hat man

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{5}{s} + \frac{1}{s+4} + \frac{4}{s-1}\right) + \left(\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s-1}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}[-5 + \mathrm{e}^{-4t} + 4\mathrm{e}^{t}](s) + \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{t}](s) \\
&= \mathcal{L}[u_1(t)\left(-5 + \mathrm{e}^{-4(t-1)} + 4\mathrm{e}^{t-1}\right) + \mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{t}](s)
\end{aligned}$$

Folglich hat man die Lösung mit den verlangten Eigenschaften

$$y(t) = u_1(t)\left(-5 + \mathrm{e}^{-4(t-1)} + 4\mathrm{e}^{t-1}\right) + \mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{t}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$
DGL: $X''(x)T(t) - X(x)T'(t) + X(x)T(t) = 0$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = -1 + \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) - (1+\lambda)T(t) = 0.$$

Es muss $\lambda \leq 0$ sein, damit die DGL für X zu konstanten oder periodischen Lösungen führt.

Die Lösung für T lautet:

$$T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(1+\lambda)t}.$$

Die Randbedingung ist eine Bedingung für $X(x)$:

$$X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

Es folgt $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

Mit $\lambda = 0$ ergibt sich

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

Randbedingungen ergeben nur $c_1 = 0$. c_2 bleibt offen.

Mit $\lambda < 0$ ergibt sich

$$X(x) = c_3 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_4 \sin\sqrt{-\lambda}x.$$

Dann $X'(x) = \sqrt{-\lambda}(-c_3 \sin\sqrt{-\lambda}x + c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x)$
Randbedingung ergibt $c_4 = 0$.
$c_3 \neq 0$ und damit $u(x,t) \neq 0$ nur möglich, wenn $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$, wenn es also ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, gibt mit $\lambda = -n^2$. Dann ist $X(x) = c_4 \cos\sqrt{-\lambda}x$ und schließlich $T(t) = T(0)\mathrm{e}^{(1-n^2)t}$.

Man hat als nicht-verschwindende Lösungen mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ die Funktionen e^t (aus dem Fall $\lambda = 0$) und $u_n(x,t)$ mit

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{-(n^2-1)t} \cos nx, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

b) Zur Erfüllung von $u(x,0) = 5 + 2\cos 3x$ Superposition von e^t und der $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = C_0 \cdot \mathrm{e}^t + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = C_0 \cdot \mathrm{e}^t + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-(n^2-1)t} \cos nx, \quad C_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zahlen C_0 und C_n aufsuchen mit

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx = 5 + 2\cos 3x$$

Es folgt

$$C_0 = 5, \quad C_3 = 2, \qquad C_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \notin \{0,3\}.$$

Somit ist eine Lösung des RWP

$$u(x,t) = 5\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-8t} \cos 3x$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Nachweis, dass es homogene Lösungen sind:

$$y(x) = x: \; 0 - \frac{x}{x-1} \cdot 1 + \frac{1}{x-1} \cdot x = 0;$$

$$\begin{aligned} y(x) = \mathrm{e}^x: \; & \mathrm{e}^x - \frac{x}{x-1} \cdot \mathrm{e}^x + \frac{1}{x-1} \cdot \mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) = \mathrm{e}^x \cdot \frac{x-1-x+1}{x-1} = 0; \end{aligned}$$

Die DGL ist von 2. Ordnung. Damit besteht jedes Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen.
Nachweis mit Wronski-Test, dass x und e^x (auf $]1, \infty[$) linear unabhängig sind: Test an der Stelle 2

$$\left(\det \begin{pmatrix} x & \mathrm{e}^x \\ 1 & \mathrm{e}^x \end{pmatrix}\right)_{|x=2} = \det \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{e}^2 \\ 1 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^2 \neq 0.$$

Damit sind die Lösungen x und e^x linear unabhängig.

Die Funktionen x und e^x bilden ein Fundamentalsystem homogener Lösungen für die vorgelegte DGL.

b) Man hat C_1 und C_2 zu bestimmen aus

$$\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{e}^2 \\ 1 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & -\mathrm{e}^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$y(x) = x + 2\mathrm{e}^{x-2}$$

die gesuchte Lösung.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Es handelt sich um ein Faltungsintegral:

$$\int_0^2 \mathrm{e}^t \big(\cos(2-t) - \sin(2-t)\big)\,\mathrm{d}t = \big(\mathrm{e}^t * (\cos t - \sin t)\big)(2)$$

Zunächst ist

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^t * (\cos t - \sin t)](s) = \frac{1}{s-1} \cdot \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \right) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin t](s).$$

Es ist also

$$(\mathrm{e}^t * (\cos t - \sin t))(2) = \sin 2,$$

damit gilt

$$\int_0^2 \mathrm{e}^t (\cos(2-t) - \sin(2-t))\,\mathrm{d}t = \sin 2.$$

b) Quadratische Ergänzung und Ausklammern eines Zahlenfaktors:

$$t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4 = 4\left(1 + \left(\frac{t-1}{2}\right)^2\right)$$

Dann ist

$$\mathcal{F}\left[\frac{4}{t^2-2t+5}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{4}{4\left(1+\left(\frac{t-1}{2}\right)^2\right)}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{t-1}{2}\right)^2}\right](\omega).$$

Mit dem bekannten Regelwerk ergibt sich

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{t-1}{2}\right)^2}\right](\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\right](\omega) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](2\omega) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\cdot\pi\mathrm{e}^{-|2\omega|}.$$

Ergebnis:

$$\mathcal{F}\left[\frac{4}{t^2-2t+5}\right](\omega) = 2\pi\mathrm{e}^{-2|\omega|-\mathrm{i}\omega}.$$

6. Aufgabe 10 Punkte

a) (2 Punkte) Wahr.
Es ist $y' = \ln \frac{x}{y}$. Die $\mathbb{R}^2$-Funktion $\ln \frac{x}{y}$ ist im offenen I. Quadranten stetig differenzierbar als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ln und $\frac{x}{y}$. In diesem Quadranten liegt der Anfangspunkt $(1, 2)$. Damit gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz genau eine maximale Lösung des vorgelegten Anfangswertsproblems.

b) (3 Punkte) Falsch.
Man wähle $f(t) = g(t) = 1$. Dann ist $\mathcal{L}[1 \cdot 1](s) = \frac{1}{s}$. Andererseits gilt

$$\mathcal{L}[1](s) \cdot \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Das ist nicht dasselbe. Widerspruch.

c) (2 Punkte) Wahr.
Die Übertragungsfunktion ist gleich $\frac{1}{s+1}$. Dann ist im Laplace-Bereich zu testen:

$$\frac{1}{(s+1)^2} \cdot \frac{2}{s+1} \stackrel{!}{=} \frac{2}{(s+1)^3}.$$

Stimmt.

d) (3 Punkte) Wahr.
Die linke Seite ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x^2 + 2t) \cdot 2x.$$

Die rechte Seite ergibt

$$x \frac{\partial u}{\partial t} = x \cdot \cos(x^2 + 2t) \cdot 2.$$

Beide Seiten sind gleich.