Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 18/19

G. Penn-Karras 01. April 2019

April – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation das Anfangswertsproblem für eine Funktion y

$$y'' - y = 2\delta_4(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation eine Zahlenfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit den zwei Eigenschaften

$$y_{k+1} - 3y_k = -2,\ y_0 = 2.$$

Hinweis: Es gilt für $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}\left[(a^k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \mathcal{Z}\left[(1, a, a^2, a^3, \ldots)\right](z) = \frac{z}{z-a}$$

und

$$\mathcal{Z}\left[(a)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \mathcal{Z}\left[(a, a, a, a, \ldots)\right](z) = \frac{az}{z-1}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die reelle Differentialgleichung

$$-2x\mathrm{e}^{-y} = y'.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung. Gibt es Lösungen, die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt sind?

b) Bestimmen Sie die Lösung, die zusätzlich die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ erfüllt, und geben Sie den maximalen Definitionsbereich dieser Lösung an. Gibt es weitere Lösungen dieses Anfangswertproblems? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

4. Aufgabe

10 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}\,.$$

5. Aufgabe

12 Punkte

a) Betrachten Sie die reelle Differentialgleichung

$$y'' = \alpha y$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau für $\alpha < 0$ periodische und nicht-konstante Lösungen $y(x)$ gibt. Geben Sie diese Lösungen an.

b) Gegeben ist das reelle Randanfangswertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0\,;$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \qquad t > 0\,,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

(i) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) benutzen und ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

(ii) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$ mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 4\sin x + 24\sin 4x.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ ist von exponentieller Ordnung.

b) Ein LTI-System mit der Impulsantwort $h(t) = 2t$ antwortet auf ein Eingangssignal $e(t) = 3t$ mit dem Ausgangssignal $a(t) = t^3$.

c) Die Fouriertransformierte von $f(t) = \frac{1}{1+4t^2}$ ist $F(\omega) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\left|\frac{\omega}{2}\right|}$.

d) Die Funktion $f(t) = \mathrm{si}(t) * r_1(t)$ ist von endlicher Bandbreite.

e) Die Bessel-Funktion $J_4(x)$ ist eine lineare Funktion.