Musterlösung Klausur ITPDG Version D vom 18. März 2021

1. Aufgabe

10 Punkte

Man setzt $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$.

a)

$$\begin{aligned}
(s^2Y - 4s + 1) - (sY - 4) - 2Y &= \mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{6}{s} \\
(s^2 - s - 2)Y - 4s + 5 &= \mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{6}{s} \\
(s+1)(s-2)Y &= 4s - 5 + \mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{6}{s} \\
Y &= \frac{4s-5}{(s+1)(s-2)} + \mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{6}{s(s+1)(s-2)}
\end{aligned}$$

PBZ:

$$Y = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \mathrm{e}^{-2s}\left(-\frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s-2}\right).$$

Rücktransformation:

$$y(t) = 3\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t} + u_2(t)\left(-3 + 2\mathrm{e}^{-(t-2)} + \mathrm{e}^{2(t-2)}\right).$$

b) Es ändert sich nur die Inhomogenität. Mit

$$6\delta_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 6\mathrm{e}^{-2s}$$

ist sofort

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{4s-5}{(s+1)(s-2)} + \mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{6}{(s+1)(s-2)} \\
&= \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \mathrm{e}^{-2s}\left(-\frac{2}{s+1} + \frac{2}{s-2}\right),
\end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$y(t) = 3\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t} + u_2(t)\left(-2\mathrm{e}^{-(t-2)} + 2\mathrm{e}^{2(t-2)}\right).$$

2. Aufgabe

8 Punkte

$\mathcal{Z}$-Transformation liefert mit $Y := \mathcal{Z}[(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](z)$ im z-Bereich

$$\begin{aligned}
(z^2Y - 4z^2 + 5z) + (zY - 4z) - 2Y &= 0\\
(z^2 + z - 2)Y - 4z^2 + z &= 0\\
Y &= \frac{4z^2 - z}{z^2 + z - 2}\\
Y &= z\frac{4z-1}{(z-1)(z+2)}
\end{aligned}$$

PBZ:

$$\frac{4z-1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+2}$$

Somit

$$Y = z\left(\frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+2}\right).$$

Rücktrafo:

$$y_k = 1 + 3\cdot(-2)^k.$$

Die Zahlenfolge $(1 + 3\cdot(-2)^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ hat die vorgegebenen Eigenschaften.

3. Aufgabe

12 Punkte

Charakteristisches Polynom

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$$
$$= -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda+1)^2$$

woraus sich der einfache Eigenwert 0 und der doppelte Eigenwert -1 ergeben.

Der Eigenraum zum einfachen Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \text{Eigenraum: span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Der Eigenraum zum doppelten Eigenwert -1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \text{Eigenraum: span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Eigenraum ist nur eindimensional.

Wir suchen einen weiteren (linear unabhängigen) Hauptvektor. Aus

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \text{ z.B. } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$h = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die verlangte allgemeine Lösung:

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-t} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ hat man nach Division durch XT:

$$\frac{X''}{X} + \frac{T'}{T} + 7 = 0.$$

Separation:

$$\frac{X''}{X} = \lambda, \quad -\frac{T'}{T} - 7 = \lambda.$$

Differentialgleichungen:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T' + (7+\lambda)T = 0.$$

Damit X periodisch und nicht-konstant ist, muss $\lambda < 0$ erfüllt werden. Dann hat man

$$X(x) = C_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})$$

Aus $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ folgt $X(0) = X(\pi) = 0$. Hier ergibt sich $C_1 = 0$ und

$$C_2 \sin(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Wenn $C_2 \neq 0$ möglich sein soll, muss gelten

$$\pi\sqrt{-\lambda} = k\pi, \;\; k \in \mathbb{N}, \;\; k > 0.$$

d. h. λ ist von der Form $-k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und $X(x)$ proportional zu $\sin kx$.

Die DGL für T lautet dann mit $\lambda = -k^2$:

$$T' + (7-k^2)T = 0.$$

$T(t)$ ist von der Form

$$\mathrm{e}^{-(7-k^2)t}.$$

Alles zusammensetzen ergibt, dass die gesuchten Lösungen u der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ durch

$$u(x,t) = A\mathrm{e}^{-(7-k^2)t} \sin kx$$

mit $A \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ gegeben sind.

b) Superposition:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{-(7-k^2)t} \sin kx$$

Die A_k sind so zu finden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = 5 \sin 2x + \sin 3x,$$

also $A_2 = 5$, $A_3 = 1$ und $A_l = 0$ für sonstige Werte von l.

Damit besitzen wir eine Lösung des vorgelegten Randwertproblems, nämlich

$$u(x,t) = 5\mathrm{e}^{-3t} \sin 2x + \mathrm{e}^{2t} \sin 3x.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Es handelt sich um die Laplace-Transformierte einer Faltung im Sinne der Laplace-Transformation. Das innere Integral ist proportional zu einem Faltungsprodukt:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{2y-4x} \cos(3x-3y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-4x} \int_0^x \mathrm{e}^{2y} \cos(3(x-y))\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-4x} \left(\mathrm{e}^{2w} * \cos 3w\right)(x).$$

(Im Faltungsprodukt ist „w“ nur eine Scheinvariable.)

Das äußere Integral ist ein Laplace-Integral, ausgewertet an der Stelle 4

$$\int_0^\infty \int_0^x \mathrm{e}^{2y-4x} \cos(3x-3y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-4x} \left(\mathrm{e}^{2w} * \cos 3w\right)(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t} * \cos 3t](4).$$

(„w“ nunmehr durch angenehmere Scheinvariable „t“ ausgetauscht.)

Mit dem Faltungssatz gilt dann

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t} * \cos 3t](4) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{2t}](4) \cdot \mathcal{L}[\cos 3t](4) = \frac{1}{4-2} \cdot \frac{4}{4^2+3^2} = \frac{2}{25}.$$

Somit haben wir

$$\int_0^\infty \int_0^x \mathrm{e}^{3y-6x} \cos(2x-2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{2}{25}.$$

b) Es handelt sich um die Fourier-Transformierte einer Faltung im Sinne der Fourier-Transformation.

Das innere Integral ist ein Faltungsprodukt:

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|y-x|} \cdot \frac{1}{1+9y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\mathrm{e}^{-|w|} * \frac{1}{1+9w^2}\right)(x)$$

(Im Faltungsprodukt ist „w“ nur eine Scheinvariable.)

Das äußere Integral ist ein Fourier-Integral, ausgewertet an der Stelle 0

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|y-x|} \cdot \frac{1}{1+9y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\left[\left(\mathrm{e}^{-|w|} * \frac{1}{1+9w^2}\right)(t)\right](0)$$

(„x“ nunmehr durch angenehmere Scheinvariable „t“ ausgetauscht.)

Mit dem Faltungssatz ergibt sich

$$\mathcal{F}\left[\left(\mathrm{e}^{-|w|} * \frac{1}{1+9w^2}\right)(t)\right](0) = \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|w|}\right](0) \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(3w)^2}\right](0) = \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|w|}\right](0) \cdot \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+\right.$$

$$= \frac{2}{1+0^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \mathrm{e}^{-0} = \frac{2\pi}{3}.$$

Es gilt also

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|y-x|} \cdot \frac{1}{1+9y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) (3 Punkte) Wahr.
Die Halbebene $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2\}$ ist offen.

Die Funktion $F : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy^2 - \frac{x}{y-2}$ ist stetig partiell differenzierbar.

Der Punkt $(1,0)$ liegt in D.

Damit hat nach dem EES das vorgelegte AWP genau eine maximal fortgesetzte Lösung.

b) (4 Punkte) Falsch.
Es sei $x^2 \sin 3x$ eine Lösung einer solchen DGL. Der Faktor $\sin 3x$ zeigt, dass das charakteristische Polynom die Nullstellen 3i und −3i besitzt. Der Faktor x^2 zeigt, dass diese Nullstellen jeweils dreifach sind. Somit hat das charakteristische Polynom mindestens Grad 6. Damit kann die DGL nicht von 4. Ordnung sein.

c) (3 Punkte) Falsch.
Die Funktion $x^2 + y^2$ löst die Laplace-Gleichung gar nicht:

$$\Delta(x^2 + y^2) = 2 + 2 \neq 0.$$

Die Funktion $x^2 + y^2$ ist keine Lösung des vorgelegten Randwertsproblems.

(Die Randwerte werden aber richtig wiedergegeben.)