Dr. Robert Beinert

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen
(Klausur – Ersttermin)

10. August 2024 Sommersemester 2024

Name, Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Studiengang: ____________________

Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Ich fühle mich prüfungsfähig.

Datum, Unterschrift des Studierenden / der Studierenden

Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

Klausur

- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ	Note

Aufgabe 1

(13 Punkte)

(a) Was ist eine *skalare*, *gewöhnliche* Differentialgleichung?

(b) Wann heißt eine skalare, gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung *separabel*?

(c) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) + (4t - 2)\, x^2(t) = 0, \quad x(0) = -\tfrac{1}{4}$$

durch Trennung der Veränderlichen.

(d) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der berechneten Lösung in (c).

(e) Begründe warum die Lösung in (c) eindeutig ist.

Aufgabe 2

(15 Punkte)

(a) Wann heißt ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung *linear*?

(b) Was ist eine *homogene* Lösung? Was eine *partikuläre*?

(c) Was ist der Exponentialansatz für lineare Systeme 1. Ordnung?

(d) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: $\vec{v} \coloneqq (0, -2, 1)^\top$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Aufgabe 3

(11 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$t^2\,x''(t) + t\,x'(t) - 9\,x(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum der gegebenen Differentialgleichung?

(b) Finde alle Lösungen der Form t^r mit $r \in \mathbb{R}$.

(c) Was ist der Wronski-Test? An wie vielen Stellen muss die Wronski-Determinante ausgewertet werden?

(d) Zeige, dass die Lösungen in (b) ein Fundamentalsystem bilden.

(e) Begründe, warum es nur eine Lösung mit $x(1) = x'(1) = 0$ gibt.

Aufgabe 4

(15 Punkte)

(a) Wie ist die Laplacetransformation für $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definiert?

(b) Wie lautet die Ableitungsregel zur Berechnung von $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)$?

(c) Sei $\theta \ge 0$. Wie lautet die Verschiebungsregel zur Berechnung von

$$\mathcal{L}[f(t-\theta)](s) = \mathcal{L}[u_\theta(t) f(t-\theta)] \qquad \text{mit} \qquad u_\theta(t) \coloneqq \begin{cases} 1, & t \ge \theta, \\ 0, & \text{sonst?} \end{cases}$$

Hinweis: f wird hier mit Null fortgesetzt, d.h. $f(t) = 0$ für $t < 0$.

(d) Was besagt der Eindeutigkeitssatz von Lerch?

(e) Löse das Anfangswertsproblem

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 30\,\mathrm{e}^{-(t-1)} u_1(t), \quad x(0) = -1,\ x'(0) = -2$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Aufgabe 5

(13 Punkte)

(a) Worum handelt es sich beim sogenannten Separationsansatz (Produktform) für eine partielle Differentialgleichung mit zwei Variablen?

(b) Verwende den Separationsansatz zur Lösung von

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) + x\, \tfrac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 3\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}, \qquad x > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6

(13 Punkte)

(a) Wie ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ und Faltung $f * g$ für $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert?

(b) Beweise, dass

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \mathcal{F}[f](-\omega).$$

Hinweis: Die Existenz/Vertauschbarkeit der Integrale kann vorausgesetzt werden.

(c) Für $a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}[a] > 0$ berechne die Fouriertransformation von

$$f(t) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{e}^{-a|t|}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad g(t) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{e}^{-a|t|}, & t \leq 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

(d) Zeige, dass

$$2a\,(f * g)(t) = (f + g)(t).$$

Laplacetransformation

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	
1	$1/s$	
t^n	$n!/s^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
e^{at}	$1/(s-a)$	$a \in \mathbb{C}$
$t^{n-1}e^{at}/(n-1)!$	$1/(s-a)^n$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$

Fouriertransformation

$f(t)$	$\mathcal{F}[f](\omega)$	
$\mathbf{1}_{[-T,T]}$	$2T\,\mathrm{sinc}(\omega T)$	$T > 0$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$	
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(\omega^2+a^2)$	$a > 0$

Stammfunktionen

$f(t)$	$F(t)$	
t^α	$t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \neq -1$
$1/t$	$\ln\lvert t\rvert$	
e^t	e^t	
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$\sinh(t)$	$\cosh(t)$	
$\cosh(t)$	$\sinh(t)$	