Dr. Robert Beinert

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen
(Klausur – Ersttermin)

10. August 2024 Sommersemester 2024

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: ______________________

Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Ich fühle mich prüfungsfähig.

Datum, Unterschrift des Studierenden / der Studierenden

Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

Klausur

- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ	Note

Aufgabe 1

(13 Punkte)

(a) Was ist eine *skalare*, *gewöhnliche* Differentialgleichung?

(b) Wann heißt eine skalare, gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung *separabel*?

(c) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) + (4t-2)\,x^2(t) = 0, \quad x(0) = -\tfrac{1}{4}$$

durch Trennung der Veränderlichen.

(d) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der berechneten Lösung in (c).

(e) Begründe warum die Lösung in (c) eindeutig ist.

Lösung zu Aufgabe 1

(a) **Skalar:** Die gesuchte Funktion ist reell-/komplexwertig. 1/2 Punkt
Gewöhnlich: Die gesuchte Funktion hängt nur von einer Variablen ab. 1/2 Punkt

(b) **Separabel:** Die Differentialgleichung hat die Form 1 Punkt

$$x'(t) = f(t)\,g(x(t))$$

für stetige Funktionen f und g.

(c) **Notation:**

$$f(t) \coloneqq -4t + 2, \qquad g(\eta) \coloneqq \eta^2.$$

Test auf konstante Lösung: 1 Punkt

$$g(-1/4) = 1/16 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \text{keine konstante Lösung.}$$

Trennung der Veränderlichen: 4 Punkte

$$\int_{t_0}^{t} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{0}^{t} (-4\xi + 2)\,\mathrm{d}\xi = -2t^2 + 2t$$

$$= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,\mathrm{d}\eta = \int_{-1/4}^{x(t)} \frac{1}{\eta^2}\,\mathrm{d}\eta = -\frac{1}{x(t)} - 4$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2t^2 - 2t - 4}$$

(d) **Nullstellen Nenner:** 1 Punkt

$$2t^2 - 2t - 4 = 2(t+1)(t-2) = 0 \quad \longrightarrow \quad t_1 = -1, \quad t_2 = 2.$$

Maximaler Definitionsbereich: 1 Punkt

$$t_0 = 0 \in (-1, 2) \quad \longrightarrow \quad x\colon (-1, 2) \to \mathbb{R}.$$

(e) **Existenz- und Eindeutigkeitssatz:** 4 Punkte

$$
\begin{aligned}
& G(t,\eta) \coloneqq -(4t-2)\,\eta^2 \\
\longrightarrow \quad & \tfrac{\partial}{\partial t} G(t,\eta) = -4\eta^2, \quad \tfrac{\partial}{\partial \eta} G(t,\eta) = -2(4t-2)\eta \\
\longrightarrow \quad & \text{partielle Ableitungen stetig auf der offenen Menge } U = \mathbb{R}^2 \\
\longrightarrow \quad & \text{Eindeutigkeit wegen } (0,-1/4) \in U.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

(15 Punkte)

(a) Wann heißt ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung *linear*?

(b) Was ist eine *homogene* Lösung? Was eine *partikuläre*?

(c) Was ist der Exponentialansatz für lineare Systeme 1. Ordnung?

(d) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$
\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.
$$

Hinweis: $\vec{v} \coloneqq (0,-2,1)^\top$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Lösung zu Aufgabe 2

(a) **Linear:** System der Form 1 Punkt

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}(t)\,x_1'(t) + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n'(t) + b_1(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= a_{1n}(t)\,x_1'(t) + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n'(t) + b_n(t)
\end{aligned}
$$

oder

$$
\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t)
$$

(b) **Homogene Lösung:** Lösung des homogenen Systems, d.h. $\vec{b}(t) = 0$. 1/2 Punkt
Partikuläre Lösung: Lösung des inhomogenen Systems, d.h. $\vec{b}(t) \neq 0$. 1/2 Punkt

(c) **Exponentialansatz:** Ansatz der Form $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda}\,\vec{v}$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. 1 Punkt

(d) **Charakteristisches Polynom:** 3 Punkte

$$
-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda-2)^2(\lambda-1) \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2
$$

Eigenvektor zu 2: 4 Punkte

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\longrightarrow \quad v_1 = v_2,\ v_3 = v_2,\ v_2 \text{ beliebig} \quad \longrightarrow \quad \text{z.B. } \vec{v} = (1,1,1)^\top$$

Hauptvektor zu 2: 4 Punkte

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad h_1 = 1 + h_2,\ h_3 = 2 + h_2,\ h_2 \text{ beliebig} \quad \longrightarrow \quad \text{z.B. } \vec{h} = (1,0,2)^\top$$

Allgemeine Lösung: 1 Punkt

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 3

(11 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$t^2\, x''(t) + t\, x'(t) - 9\, x(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum der gegebenen Differentialgleichung?

(b) Finde alle Lösungen der Form t^r mit $r \in \mathbb{R}$.

(c) Was ist der Wronski-Test? An wie vielen Stellen muss die Wronski-Determinante ausgewertet werden?

(d) Zeige, dass die Lösungen in (b) ein Fundamentalsystem bilden.

(e) Begründe, warum es nur eine Lösung mit $x(1) = x'(1) = 0$ gibt.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) **Dimension:** Ordnung 2 $\longrightarrow$ Dimension 2 1 Punkt

(b) **Lösung mit Ansatz:** 4 Punkte

$$t^r\big(r(r-1) + r - 9\big) = 0 \quad \longrightarrow \quad r^2 - 9 = 0 \quad \longrightarrow \quad r_{1,2} = \pm 3$$

$$\longrightarrow \quad x_1(t) = t^3,\ x_2(t) = t^{-3}$$

(c) **Wronski-Test:** Die Lösungen $x_1, \dots, x_n$ sind linear unabhängig, wenn 2 Punkte

$$\det W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

für ein (und damit für alle) t im Definitionsbereich.

(d) **Fundamentalsystem:** Lineare Unabhängigkeit: 2 Punkte

$$\det W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Vollständigkeit: Ordnung 2

(e) **Eindeutigkeit:** Die Koeffizienten des zugehörigen Systems 2 Punkte

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9/t^2 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = 0$$

mit $x_k(t) \coloneqq x^{(k-1)}(t)$ sind stetig auf dem Definitionsbereich (EES).

Aufgabe 4

(15 Punkte)

(a) Wie ist die Laplacetransformation für $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definiert?

(b) Wie lautet die Ableitungsregel zur Berechnung von $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)$?

(c) Sei $\theta \geq 0$. Wie lautet die Verschiebungsregel zur Berechnung von

$$\mathcal{L}[f(t-\theta)](s) = \mathcal{L}[u_\theta(t) f(t-\theta)] \qquad \text{mit} \qquad u_\theta(t) \coloneqq \begin{cases} 1, & t \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst?} \end{cases}$$

Hinweis: f wird hier mit Null fortgesetzt, d.h. $f(t) = 0$ für $t < 0$.

(d) Was besagt der Eindeutigkeitssatz von Lerch?

(e) Löse das Anfangswertsproblem

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 30\,\mathrm{e}^{-(t-1)} u_1(t), \quad x(0) = -1,\ x'(0) = -2$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) **Laplacetransformation:** 1 Punkt

$$F(s) \coloneqq \mathcal{L}[f](s) \coloneqq \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t, \quad s \in \mathbb{C}$$

(b) **Ableitungsregel:** 1 Punkt

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

(c) **Verschiebungsregel:** 1 Punkt

$$\mathcal{L}[f(t-\theta)](s) = \mathrm{e}^{-\theta s} \mathcal{L}[f](s)$$

(d) **Eindeutigkeitssatz von Lerch:** 2 Punkte
$f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig von exponentieller Ordnung γ.

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \quad \operatorname{Re}[s] > \gamma \quad \Longrightarrow \quad f(t) = g(t) \quad \text{(in allen Stetigkeitspunkten)}$$

(e) **Transformation Differentialgleichung:** 4 Punkte

$$(s^2 X(s) + s \cdot 1 + 2) + (s X(s) + 1) - 6X(s) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-s}}{s+1}$$
$$\longrightarrow \quad (s^2 + s - 6)\, X(s) = (s-2)(s+3)\, X(s) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-s}}{s+1} - (s+3)$$
$$\longrightarrow \quad X(s) = \frac{30\,\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s-2)(s+3)} - \frac{1}{s-2}$$

Partialbruchzerlegung: 4 Punkte

$$\frac{30}{(s+1)(s-2)(s+3)} = -\frac{5}{s+1} + \frac{2}{s-2} + \frac{3}{s+3}$$
$$\longrightarrow \quad X(s) = \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{5}{s+1} + \frac{2}{s-2} + \frac{3}{s+3}\right) - \frac{1}{s-2}$$

Rücktransformation: 2 Punkte

$$x(t) = -\mathrm{e}^{2t} + u_1(t)\left(-5\mathrm{e}^{-(t-1)} + 2\mathrm{e}^{2(t-1)} + 3\mathrm{e}^{-3(t-1)}\right)$$

Aufgabe 5

(13 Punkte)

(a) Worum handelt es sich beim sogenannten Separationsansatz (Produktform) für eine partielle Differentialgleichung mit zwei Variablen?

(b) Verwende den Separationsansatz zur Lösung von

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) + x\, \tfrac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 3\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}, \qquad x > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Aufgabe 5

(a) **Separationsansatz:** 1 Punkt

$$u(x,t) = X(x)\, T(t)$$

(b) **Ansatz einsetzen:** 4 Punkte

$$X(x)\, T'(t) + x\, X'(x)\, T(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{x\, X'(x)}{X(x)} =: \gamma$$
$$\longrightarrow \quad T'(t) - \gamma T(t) = 0, \quad x\, X'(x) + \gamma X(x) = 0$$

Differentialgleichung in T: 2 Punkte

$$T'(t) = \gamma T(t) \quad \longrightarrow \quad T_\gamma(t) = A_\gamma e^{\gamma t}$$

Differentialgleichung in X: 4 Punkte

$$x\,X'(x) + \gamma X(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad X'(x) = -\frac{\gamma}{x}\,X(x)$$

$$\longrightarrow \quad X_\gamma(x) = B_\gamma\, e^{-\gamma \ln(x)} = B_\gamma\, x^{-\gamma}$$

Differentialgleichung in u: 1 Punkt

$$u_\gamma(x,t) \coloneqq C_\gamma e^{\gamma t} x^{-\gamma}$$

Superpositionsprinzip: 1 Punkt

$$u(x,t) \coloneqq 3u_{-1/2}(x,t) - u_{1/2}(x,t) = 3e^{-t/2}\sqrt{x} - e^{t/2}/\sqrt{x}$$

Aufgabe 6

(13 Punkte)

(a) Wie ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ und Faltung $f * g$ für $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert?

(b) Beweise, dass

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \mathcal{F}[f](-\omega).$$

Hinweis: Die Existenz/Vertauschbarkeit der Integrale kann vorausgesetzt werden.

(c) Für $a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}[a] > 0$ berechne die Fouriertransformation von

$$f(t) \coloneqq \begin{cases} e^{-a|t|}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad g(t) \coloneqq \begin{cases} e^{-a|t|}, & t \le 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

(d) Zeige, dass

$$2a\,(f * g)(t) = (f + g)(t).$$

Lösung zu Aufgabe 6

(a) **Fouriertransformation:** 1 Punkt

$$\hat{f}(\omega) \coloneqq \mathcal{F}[f](\omega) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

Faltung: 1 Punkt

$$(f * g)(t) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) **Faltungssatz:** 3 Punkte

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+\tau)} \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \,\mathrm{d}\tau = \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega)$$

Reflektionssatz: 2 Punkte

$$\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t = \mathcal{F}[f](-\omega)$$

(c) **Fouriertransformation:** 3 Punkte

$$\hat{f}(\omega) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\omega)t} \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}\, \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\omega)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}$$
$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \frac{1}{a-\mathrm{i}\omega}$$

(d) **Faltung:** 3 Punkt

$$\mathcal{F}[2a(f*g)](\omega) = \frac{2a}{(a+\mathrm{i}\omega)(a-\mathrm{i}\omega)} = \frac{1}{a+\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{a-\mathrm{i}\omega} = \mathcal{F}[f+g](\omega)$$

Laplacetransformation

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	
1	$1/s$	
t^n	$n!/s^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
e^{at}	$1/(s-a)$	$a \in \mathbb{C}$
$t^{n-1}e^{at}/(n-1)!$	$1/(s-a)^n$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$

Fouriertransformation

$f(t)$	$\mathcal{F}[f](\omega)$	
$\mathbf{1}_{[-T,T]}$	$2T\,\mathrm{sinc}(\omega T)$	$T > 0$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$	
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(\omega^2+a^2)$	$a > 0$

Stammfunktionen

$f(t)$	$F(t)$	
t^α	$t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \neq -1$
$1/t$	$\ln\lvert t\rvert$	
e^t	e^t	
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$\sinh(t)$	$\cosh(t)$	
$\cosh(t)$	$\sinh(t)$	