Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Robert Beinert

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen
(Klausur – Zweittermin)

24. September 2024

Sommersemester 2024

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: ______________________

Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).
- ich mich prüfungsfähig fühle.

____
Datum, Unterschrift des Studierenden / der Studierenden

Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

Klausur

- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ	Note

Aufgabe 1

(13 Punkte)

(a) Wann heißt eine Differentialgleichung *skalar* und *gewöhnlich*? (1P)

(b) Wann heißt eine skalare, gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung *separabel*? (1P)

(c) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) - 2t\,(x^2(t) + 1) = 0, \quad x(0) = 0$$

durch Trennung der Veränderlichen. (5P)

(d) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der berechneten Lösung in (c). (2P)

(e) Begründe warum die Lösung in (c) eindeutig ist. (4P)

Aufgabe 2

(15 Punkte)

(a) Wann heißt ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung *linear*? (1P)

(b) Wann heißt eine Lösung *homogen* und wann *partikulär*? (1P)

(c) Was ist der Exponentialansatz für lineare Systeme 1. Ordnung? (1P)

(d) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: $\vec{v} := (2, 1, 0)^\top$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. (12P)

Aufgabe 3

(11 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$t^2\, x''(t) - 2t\, x'(t) - 4\, x(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Welche Hypothese kann mit dem Wronski-Test getestet werden? An wie vielen Stellen muss die Wronski-Determinante ausgewertet werden? (2P)

(b) Finde alle Lösungen der Form $x(t) \coloneqq t^r$ mit $r \in \mathbb{R}$. (4P)

(c) Welche Dimension hat der Lösungsraum der gegebenen Differentialgleichung? (1P)

(d) Zeige, dass die Lösungen in (b) ein (vollständiges) Fundamentalsystem bilden. (2P)

(e) Begründe, warum es jeweils nur eine Lösung mit $x(1) = x_1$ und $x'(1) = x_1'$ für alle $(x_1, x_1') \in \mathbb{R}^2$ gibt. (2P)

Aufgabe 4

(15 Punkte)

(a) Wie ist die Laplacetransformation für $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definiert? (1P)

(b) Wann heißt eine Funktion stückweise stetig und von exponentieller Ordnung? (2P)

(c) Wie lautet die Ableitungsregel zur Berechnung von $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)$? (1P)

(d) Wie lautet die Multiplikationsregel zur Berechnung von $\mathcal{L}[t f(t)](s)$? (1P)

(e) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) - 5x(t) + 9t\,\mathrm{e}^{2t} = 0, \quad x(0) = 3,$$

mit Hilfe der Laplacetransformation. (10P)

Aufgabe 5

(13 Punkte)

(a) Worum handelt es sich beim sogenannten Separationsansatz (Produktform) für eine partielle Differentialgleichung mit zwei Variablen? (1P)

(b) Verwende den Separationsansatz zur Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - 2xt \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 2x^5 - 1/x^3, \qquad x,t > 0.$$ (12P)

Aufgabe 6

(13 Punkte)

(a) Wie ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert? (1P)

(b) Wann heißt eine Funktion *absolut integrierbar*? (1P)

(c) Beweise, dass

$$\mathcal{F}[t f(t)](\omega) = \mathrm{i}\hat{f}(\omega)' \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \mathcal{F}[f](-\omega). \tag{5P}$$

Hinweis: Vertauschbarkeit von Integration/Differenziation kann vorausgesetzt werden.

(d) Für $a > 0$ berechne die Fouriertransformation von

$$f(t) \coloneqq |t|\,\mathrm{e}^{-a|t|}. \tag{6P}$$

Hinweis: Berechne zunächst die Fouriertransformation der „rechten Seite"

$$t\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t) \coloneqq \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

mit Hilfe der Rechenregeln und der Fourier-Tabelle.

Laplacetransformation

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	
1	$1/s$	
t^n	$n!/s^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
e^{at}	$1/(s-a)$	$a \in \mathbb{C}$
$t^{n-1}\mathrm{e}^{at}/(n-1)!$	$1/(s-a)^n$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$

Fouriertransformation

$f(t)$	$\mathcal{F}[f](\omega)$	
$\mathbf{1}_{[-T,T]}$	$2T\,\mathrm{sinc}(\omega T)$	$T > 0$
$\mathrm{e}^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/2}$	
$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(\omega^2+a^2)$	$a > 0$
$\mathrm{e}^{-at}\,\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$	$1/(a+\mathrm{i}\omega)$	$a > 0$

Stammfunktionen

$f(t)$	$F(t)$	
t^α	$t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \neq -1$
$1/t$	$\ln\lvert t\rvert$	
$1/\sqrt{1-t^2}$	$\arcsin(t)$	
$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(t)$	
$1/(t^2+1)$	$\arctan(t)$	
e^t	e^t	
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$1+\tan^2(t)$	$\tan(t)$	
$\sinh(t)$	$\cosh(t)$	
$\cosh(t)$	$\sinh(t)$	