

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen (Klausur – Zweittermin)

24. September 2024

Sommersemester 2024

| | |
|------------------------|-------|
| NAME, VORNAME: | _____ |
| MATRIKELNUMMER: | _____ |
| STUDIENGANG: | _____ |

Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).
- ich mich prüfungsfähig fühle.

| |
|--|
| _____ |
| Datum, Unterschrift des Studierenden / der Studierenden |

Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

Klausur

- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.

Korrektur

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ | Note |
|---|---|---|---|---|---|----------|------|
| | | | | | | | |

Aufgabe 1

(13 Punkte)

- (a) Wann heißt eine Differentialgleichung *skalar* und *gewöhnlich*? (1P)
- (b) Wann heißt eine skalare, gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung *separabel*? (1P)
- (c) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) - 2t(x^2(t) + 1) = 0, \quad x(0) = 0$$

durch Trennung der Veränderlichen. (5P)

- (d) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der berechneten Lösung in (c). (2P)
- (e) Begründe warum die Lösung in (c) eindeutig ist. (4P)

Lösung zu Aufgabe 1

- (a) **Skalar:** Die gesuchte Funktion ist reell-/komplexwertig. 1/2 Punkt
Gewöhnlich: Die gesuchte Funktion hängt nur von einer Variablen ab. 1/2 Punkt

- (b) **Separabel:** Die Differentialgleichung hat die Form 1 Punkt

$$x'(t) = f(t) g(x(t))$$

für stetige Funktionen f und g .

- (c) **Notation:**

$$f(t) := 2t, \quad g(\eta) := \eta^2 + 1.$$

Test auf konstante Lösung: 1 Punkt

$$g(0) = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{keine konstante Lösung.}$$

Trennung der Veränderlichen: 4 Punkte

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi &= \int_0^t 2\xi d\xi = t^2 \\ &= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_0^{x(t)} \frac{1}{\eta^2 + 1} d\eta = \arctan(x(t)) \\ &\rightarrow x(t) = \tan(t^2) \end{aligned}$$

- (d) **Pole der Lösung:** 1 Punkt

$$t^2 = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = \pm\sqrt{\pi/2}.$$

Maximaler Definitionsbereich: 1 Punkt

$$t_0 = 0 \in (-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}) \quad \rightarrow \quad x: (-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

(e) Existenz- und Eindeigkeitsatz:

4 Punkte

- $G(t, \eta) := 2t (\eta^2 + 1)$
- $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(t, \eta) = 2(\eta^2 + 1), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} G(t, \eta) = 4t\eta$
- \rightarrow partielle Ableitungen stetig auf der offenen Menge $U = \mathbb{R}^2$
- \rightarrow Eindeutigkeit wegen $(0, 0) \in U$.

Aufgabe 2

(15 Punkte)

- (a) Wann heißt ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung *linear*? (1P)
- (b) Wann heißt eine Lösung *homogen* und wann *partikulär*? (1P)
- (c) Was ist der Exponentialansatz für lineare Systeme 1. Ordnung? (1P)
- (d) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: $\vec{v} := (2, 1, 0)^T$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. (12P)

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Linear: System der Form

1 Punkt

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t) x_1'(t) + \dots + a_{1n}(t) x_n'(t) + b_1(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t) x_1'(t) + \dots + a_{nn}(t) x_n'(t) + b_n(t) \end{aligned}$$

oder

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

- (b) **Homogene Lösung:** Lösung des homogenen Systems, d.h. $\vec{b}(t) = 0$. (1/2 Punkt)
- Partikuläre Lösung:** Lösung des inhomogenen Systems, d.h. $\vec{b}(t) \neq 0$. (1/2 Punkt)
- (c) **Exponentialansatz:** Ansatz der Form $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. (1 Punkt)
- (d) **Charakteristisches Polynom:** (3 Punkte)

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -1$$

Eigenvektor zu -1:

4 Punkte

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\rightarrow v_1 = -3v_3, v_2 = -v_3, v_3 \text{ beliebig} \quad \rightarrow \quad \text{z.B. } \vec{v} = (-3, -1, 1)^\top$$

Hauptvektor zu 2:

4 Punkte

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{z.B. } \vec{h} = (0, 0, -1/2)^\top$$

Allgemeine Lösung:

1 Punkt

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 3

(11 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$t^2 x''(t) - 2t x'(t) - 4x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

- (a) Welche Hypothese kann mit dem Wronski-Test getestet werden? An wie vielen Stellen muss die Wronski-Determinante ausgewertet werden? (2P)
- (b) Finde alle Lösungen der Form $x(t) := t^r$ mit $r \in \mathbb{R}$. (4P)
- (c) Welche Dimension hat der Lösungsraum der gegebenen Differentialgleichung? (1P)
- (d) Zeige, dass die Lösungen in (b) ein (vollständiges) Fundamentalsystem bilden. (2P)
- (e) Begründe, warum es jeweils nur eine Lösung mit $x(1) = x_1$ und $x'(1) = x'_1$ für alle $(x_1, x'_1) \in \mathbb{R}^2$ gibt. (2P)

Lösung zu Aufgabe 3

- (a) **Wronski-Test:** Die Lösungen x_1, \dots, x_n sind linear unabhängig, wenn

2 Punkte

$$\det W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

für ein (und damit für alle) t im Definitionsbereich.

- (b) **Lösung mit Ansatz:**

4 Punkte

$$t^r(r(r-1) - 2r - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 - 3r - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = 4, r_2 = -1$$

$$\rightarrow \quad x_1(t) = t^4, x_2(t) = t^{-1}$$

(c) **Dimension:** Ordnung 2 \rightarrow Dimension 2

1 Punkt

(d) **Fundamentalsystem:** Lineare Unabhängigkeit:

2 Punkte

$$\det W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Vollständigkeit: Ordnung 2

(e) **Eindeutigkeit:** Die Koeffizienten des zugehörigen Systems

2 Punkte

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4/t^2 & 2/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = 0$$

mit $x_k(t) := x^{(k-1)}(t)$ sind stetig auf dem Definitionsbereich (EES).

Aufgabe 4

(15 Punkte)

- (a) Wie ist die Laplacetransformation für $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert? (1P)
 (b) Wann heißt eine Funktion stückweise stetig und von exponentieller Ordnung? (2P)
 (c) Wie lautet die Ableitungsregel zur Berechnung von $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)$? (1P)
 (d) Wie lautet die Multiplikationsregel zur Berechnung von $\mathcal{L}[tf(t)](s)$? (1P)
 (e) Löse das Anfangswertproblem

$$x'(t) - 5x(t) + 9t e^{2t} = 0, \quad x(0) = 3,$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

(10P)

Lösung zu Aufgabe 4

(a) **Laplacetransformation:**

1 Punkt

$$F(s) := \mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

(b) **Stückweise stetig:**

1 Punkt

Auf jedem beschränkten Intervall nur endlich viele Unstetigkeiten.
 Links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren.

Exponentielle Ordnung:

1 Punkt

Es gibt ein $\gamma \geq 0$ und $C \geq 0$, sodass

$$|f(t)| \leq C e^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(c) **Ableitungsregel:**

1 Punkt

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

(d) Multiplikationsregel:

1 Punkt

$$\mathcal{L}[t f(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s)$$

(e) Transformation Differentialgleichung:

4 Punkte

$$\begin{aligned} s X(s) - 3 - 5 X(s) &= \frac{d}{ds} \frac{9}{s-2} = -\frac{9}{(s-2)^2} \\ \rightarrow (s-5) X(s) &= -\frac{9}{(s-2)^2} + 3 \\ \rightarrow X(s) &= -\frac{9}{(s-2)^2(s-5)} + \frac{3}{s-5} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

4 Punkte

$$\begin{aligned} \frac{-9}{(s-2)^2(s-5)} &= -\frac{1}{s-5} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2} \\ \rightarrow X(s) &= \frac{2}{s-5} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2} \end{aligned}$$

Rücktransformation:

2 Punkte

$$x(t) = 2 e^{5t} + e^{2t} + 3t e^{2t}$$

Aufgabe 5

(13 Punkte)

- (a) Worum handelt es sich beim sogenannten Separationsansatz (Produktform) für eine partielle Differentialgleichung mit zwei Variablen? (1P)
- (b) Verwende den Separationsansatz zur Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - 2xt \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 2x^5 - 1/x^3, \quad x, t > 0. \quad (12P)$$

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Separationsansatz:

1 Punkt

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

(b) Ansatz einsetzen:

4 Punkte

$$\begin{aligned} X(x) T'(t) - 2xt X'(x) T(t) &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{T'(t)}{2t T(t)} = \frac{x X'(x)}{X(x)} =: \gamma \\ \rightarrow T'(t) - 2\gamma t T(t) &= 0, \quad x X'(x) - \gamma X(x) = 0 \end{aligned}$$

Differentialgleichung in T:

3 Punkte

$$T'(t) = 2\gamma t T(t) \quad \rightarrow \quad T_Y(t) = A_Y e^{\gamma t^2}$$

Differentialgleichung in X:

3 Punkte

$$x X'(x) - \gamma X(x) = 0 \quad \rightarrow \quad X'(x) = \frac{\gamma}{x} X(x)$$

$$\rightarrow \quad X_Y(x) = B_Y e^{\gamma \ln(x)} = B_Y x^\gamma$$

Differentialgleichung in u:

1 Punkt

$$u_Y(x, t) := C_Y e^{\gamma t^2} x^\gamma$$

Superpositionsprinzip:

1 Punkt

$$u(x, t) := 2u_5(x, t) - u_{-3}(x, t) = 2e^{5t^2} x^5 - e^{-t^2} / x^3$$

Aufgabe 6

(13 Punkte)

- (a) Wie ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}[f]$ für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert? (1P)
- (b) Wann heißt eine Funktion *absolut integrierbar*? (1P)
- (c) Beweise, dass

$$\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = i\hat{f}(\omega)' \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \mathcal{F}[f](-\omega). \quad (5P)$$

Hinweis: Vertauschbarkeit von Integration/Differenziation kann vorausgesetzt werden.

- (d) Für $a > 0$ berechne die Fouriertransformation von

$$f(t) := |t| e^{-a|t|}. \quad (6P)$$

Hinweis: Berechne zunächst die Fouriertransformation der „rechten Seite“

$$t e^{-at} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

mit Hilfe der Rechenregeln und der Fourier-Tabelle.

Lösung zu Aufgabe 6

- (a) **Fouriertransformation:**

1 Punkt

$$\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

(b) **Absolute Integrierbarkeit:**

1 Punkt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

(c) **Multiplikationssatz:**

3 Punkte

$$\hat{f}(\omega)' = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt = -i\mathcal{F}[t f(t)](\omega)$$

Reflektionssatz:

2 Punkte

$$\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}[f](-\omega)$$

(d) **Fouriertransformation:**

3 Punkte

$$\mathcal{F}[t e^{-at} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[e^{-at} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{a + i\omega} = \frac{1}{(a + i\omega)^2}$$

Spiegelung:

3 Punkt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(a + i\omega)^2} + \frac{1}{(a - i\omega)^2} = \frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$$

Laplace transformation

| $f(t)$ | $\mathcal{L}[f](s)$ | |
|------------------------|---------------------|--------------------------------------|
| 1 | $1/s$ | |
| t^n | $n!/s^{n+1}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| e^{at} | $1/(s-a)$ | $a \in \mathbb{C}$ |
| $t^{n-1}e^{at}/(n-1)!$ | $1/(s-a)^n$ | $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$ |
| $1/\sqrt{\pi t}$ | $1/\sqrt{s}$ | |
| $\sin(at)$ | $a/(s^2+a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $\cos(at)$ | $s/(s^2+a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $\sinh(at)$ | $a/(s^2-a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $\cosh(at)$ | $s/(s^2-a^2)$ | $a \in \mathbb{R}$ |

Fourier transformation

| $f(t)$ | $\mathcal{F}[f](\omega)$ | |
|--------------------------------------|------------------------------------|---------|
| $\mathbf{1}_{[-T,T]}$ | $2T \operatorname{sinc}(\omega T)$ | $T > 0$ |
| $e^{-t^2/2}$ | $\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$ | |
| $e^{-a t }$ | $2a/(\omega^2+a^2)$ | $a > 0$ |
| $e^{-at} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$ | $1/(a+i\omega)$ | $a > 0$ |

Stammfunktionen

| $f(t)$ | $F(t)$ | |
|-------------------|---------------------------|------------------|
| t^α | $t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ | $\alpha \neq -1$ |
| $1/t$ | $\ln t $ | |
| $1/\sqrt{1-t^2}$ | $\arcsin(t)$ | |
| $-1/\sqrt{1-x^2}$ | $\arccos(t)$ | |
| $1/(t^2+1)$ | $\arctan(t)$ | |
| e^t | e^t | |
| $\sin(t)$ | $-\cos(t)$ | |
| $\cos(t)$ | $\sin(t)$ | |
| $1+\tan^2(t)$ | $\tan(t)$ | |
| $\sinh(t)$ | $\cosh(t)$ | |
| $\cosh(t)$ | $\sinh(t)$ | |