

# Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen (Klausur – Ersttermin)

16. Februar 2026

Wintersemester 2025/26

<b>NAME, VORNAME:</b>	_____
<b>MATRIKELNUMMER:</b>	_____
<b>STUDIENGANG:</b>	_____

## Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Ich fühle mich prüfungsfähig.

Datum, Unterschrift des Studierenden / der Studierenden

## Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

## Klausur

- Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumenten-echten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.

# Musterlösung

**Aufgabe 1** (*Separable Differentialgleichungen*)

(15 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) + \frac{x^2(t)}{\sqrt{t+4}} = 0, \quad x(0) = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

- (a) Begründe, warum die Lösung des Anfangswertproblems (1) eindeutig ist. (4P)
- (b) Begründe, warum das Anfangswertproblem (1) *separabel* ist. (2P)
- (c) Welche beiden Lösungsansätze umfasst die *Trennung der Veränderlichen*? (2P)
- (d) Löse das Anfangswertproblem (1) durch Trennung der Veränderlichen. (6P)
- (e) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der in (d) berechneten Lösung. (1P)

**Aufgabe 2** (*Lineare Differentialgleichungssysteme*)

(18 Punkte)

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

*Hinweis:*  $\vec{v} := (1, 0, 1)^\top$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

- (a) Entscheide mit Begründung, ob das System (2) *homogen* oder *inhomogen* ist. (2P)
- (b) Welche Voraussetzungen muss ein System für den *Exponentialansatz* erfüllen?  
Erfüllt das System (2) diese Voraussetzungen? (2P)
- (c) Bestimme die allgemeine, *reellwertige* Lösung des Systems (2). (12P)
- (d) Bestimme mithilfe von (c) eine Lösung mit Anfangswert  $\vec{x}(0) = (0, 1, 0)^\top$ . (2P)

**Aufgabe 3** (*Differentialgleichungen höherer Ordnung*)

(17 Punkte)

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - 2t^{-1}x'(t) - 4t^{-2}x(t) = 30t^3, \quad t > 0. \quad (3)$$

- (a) Welche Hypothese kann mit dem Wronski-Test getestet werden, und wie ist das allgemeine Vorgehen beim Wronski-Test? (3P)
- (b) Zeige, dass  $x_1(t) := t^4$  und  $x_2(t) := t^{-1}$  die zugehörige homogene Differentialgleichung von (3) lösen und ein Fundamentalsystem bilden. (6P)
- (c) Bestimme eine partikuläre Lösung von (3) durch *Variation der Konstanten*. (7P)
- (d) Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3). (1P)

**Aufgabe 4** (*Laplace-Ansatz für gewöhnliche Differentialgleichungen*)

(15 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) + 2x(t) = t \sin(2t), \quad x(0) = -1. \quad (4)$$

- (a) Was ist eine stückweise stetige Funktion exponentieller Ordnung? (4P)
- (b) Wie und unter welchen Voraussetzungen kann die Laplace-Transformation invertiert werden? (3P)
- (c) Die Funktion  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig und von exponentieller Ordnung. Beweise die Multiplikationsregel

$$\mathcal{L}[t f(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s). \quad (3P)$$

*Hinweis:* Die Existenz der Integrale/Ableitungen darf vorausgesetzt werden. Integration und Differentiation dürfen ohne Begründung vertauscht werden.

- (d) Nutze (b), um die Laplace-Transformierte von  $f(t) = t \sin(2t)$  zu berechnen. (2P)

- (e) Nutze (c), um die Laplace-transformierte Lösung  $\mathcal{L}[x(t)](s)$  von (4) zu berechnen. (3P)  
*Hinweis:* Die Rücktransformation ist nicht erforderlich.

**Aufgabe 5** (*Partielle Differentialgleichungen*)

(15 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + (1 - x) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 3\sqrt{1 - x} - 3, \quad -1 < x < 1, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

- (a) Bestimme (mit Begründung) die Ordnung der Differentialgleichung. (2P)

(b) Verwende den Separationsansatz

$$u(x, t) := X(x) T(t)$$

und stelle Differentialgleichungen für  $X(x)$  und  $T(t)$  auf. (4P)

(c) Löse die beiden aufgestellten Differentialgleichungen aus (b). (6P)

(d) Verwende das Superpositionsprinzip für die Lösungen aus (c), um eine Lösung des Anfangswertproblems (5) zu finden. (3P)

### Laplace transformation

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	
1	$1/s$	
$t^n$	$n!/s^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$e^{at}$	$1/(s-a)$	$a \in \mathbb{C}$
$t^{n-1}e^{at}/(n-1)!$	$1/(s-a)^n$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$

### Fourier transformation

$f(t)$	$\mathcal{F}[f](\omega)$	
$1_{[-T,T]}$	$2T \operatorname{sinc}(\omega T)$	$T > 0$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$	
$e^{-a t }$	$2a/(\omega^2+a^2)$	$a > 0$

### Stammfunktionen

$f(t)$	$F(t)$	
$t^\alpha$	$t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \neq -1$
$1/t$	$\ln t $	
$1/(1-t)$	$\ln(1/(1-t))$	
$e^t$	$e^t$	
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$\sinh(t)$	$\cosh(t)$	
$\cosh(t)$	$\sinh(t)$	