Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

PD Dr. Robert Beinert

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen
(Klausur – Ersttermin)

16. Februar 2026 | Wintersemester 2025/26

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: ______________________

Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Ich fühle mich prüfungsfähig.

Datum, Unterschrift des Studierenden / der Studierenden

Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

Klausur

- Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.

Musterlösung

Aufgabe 1 (*Separable Differentialgleichungen*) (15 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) + \frac{x^2(t)}{\sqrt{t+4}} = 0, \quad x(0) = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

(a) Begründe, warum die Lösung des Anfangswertproblems (1) eindeutig ist. (4P)

(b) Begründe, warum das Anfangswertproblem (1) *separabel* ist. (2P)

(c) Welche beiden Lösungsansätze umfasst die *Trennung der Veränderlichen*? (2P)

(d) Löse das Anfangswertproblem (1) durch Trennung der Veränderlichen. (6P)

(e) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der in (d) berechneten Lösung. (1P)

Lösung zu Aufgabe 1

(a) **Existenz- und Eindeutigkeitssatz:** 4 Punkte

$$\begin{aligned}
&G(t,\eta) \coloneqq -\frac{\eta^2}{\sqrt{t+4}} \\
\longrightarrow \quad & \tfrac{\partial}{\partial t} G(t,\eta) = \frac{\eta^2}{2(\sqrt{t+4})^3}, \quad \tfrac{\partial}{\partial \eta} G(t,\eta) = -\frac{2\eta}{\sqrt{t+4}} \\
\longrightarrow \quad & \text{partielle Ableitungen stetig auf der offenen Menge } U = (-4,\infty) \times \mathbb{R} \\
\longrightarrow \quad & \text{Eindeutigkeit wegen } (0, 1/4) \in U.
\end{aligned}$$

(b) **Separabel:** Die Differentialgleichung hat die Form 2 Punkte

$$x'(t) = f(t)\, g(x(t))$$

für stetige Funktionen

$$\begin{aligned}
&f\colon (-4,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t+4}}, \\
&g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \eta \longmapsto -\eta^2.
\end{aligned}$$

(c) **Lösungsansätze:** 2 Punkte

1. $x(t) = x_0$ für jede Nullstelle von g.
2. $x(t)$ löst $G(x(t)) = F(t)$ für $G = \int 1/g(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ und $F = \int f(t)\,\mathrm{d}t$.

(d) **Trennung der Veränderlichen:** 6 Punkte

$$\int_{t_0}^{t} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\xi+4}}\,\mathrm{d}\xi = 2\left[\sqrt{\xi+4}\right]_0^t = 2\sqrt{t+4} - 4$$

$$= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,\mathrm{d}\eta = -\int_{1/4}^{x(t)} \frac{1}{\eta^2}\,\mathrm{d}\eta = \left[\frac{1}{\eta}\right]_{1/4}^{x(t)} = \frac{1}{x(t)} - 4$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+4}}$$

(e) **Nullstelle Nenner:**

$$t + 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad t_1 = -4.$$

Maximaler Definitionsbereich: 1 Punkt

$$t_0 = 0 \in (-4, \infty) \quad \longrightarrow \quad x\colon (-4,\infty) \to \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (*Lineare Differentialgleichungssysteme*) (18 Punkte)

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Hinweis: $\vec{v} \coloneqq (1,0,1)^\top$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

(a) Entscheide mit Begründung, ob das System (2) *homogen* oder *inhomogen* ist. (2P)

(b) Welche Voraussetzungen muss ein System für den *Exponentialansatz* erfüllen? Erfüllt das System (2) diese Voraussetzungen? (2P)

(c) Bestimme die allgemeine, *reellwertige* Lösung des Systems (2). (12P)

(d) Bestimme mithilfe von (c) eine Lösung mit Anfangswert $\vec{x}(0) = (0,1,0)^\top$. (2P)

Lösung zu Aufgabe 2

(a) **Homogen:** System hat die Form $\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t)$. 2 Punkte

(b) **Exponentialansatz:** Lineares, (homogenes) System 1. Ordnung mit konstanter Systemmatrix $A(t)$. Ja, die Bedingungen sind erfüllt. 2 Punkte

(c) **Charakteristisches Polynom:** 3 Punkte

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1). \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm\mathrm{i}$$

Eigenvektor zu i: 4 Punkte

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & 2 \\ -1 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

$$\longrightarrow \quad v_3 = 0,\ -\mathrm{i}v_1 + v_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad v_2 = \mathrm{i}v_1 \quad \longrightarrow \quad \text{z.B. } \vec{v} = (1, \mathrm{i}, 0)^\top$$

Real- und Imaginärteil bestimmen: 3 Punkte

$$\vec{x}_2(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix} = \big(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\big)\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\\ 0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung: 2 Punkte

$$\vec{x}(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} \qquad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

(d) **Anpassen an Anfangswert:** 2 Punkte

$$\vec{x}(0) = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad C_1 = C_2 = 0,\ C_3 = 1.$$

$$\longrightarrow \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (*Differentialgleichungen höherer Ordnung*) (17 Punkte)

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - 2t^{-1}\,x'(t) - 4t^{-2}\,x(t) = 30t^3, \qquad t > 0. \tag{3}$$

(a) Welche Hypothese kann mit dem Wronski-Test getestet werden, und wie ist das allgemeine Vorgehen beim Wronski-Test? (3P)

(b) Zeige, dass $x_1(t) \coloneqq t^4$ und $x_2(t) \coloneqq t^{-1}$ die zugehörige homogene Differentialgleichung von (3) lösen und ein Fundamentalsystem bilden. (6P)

(c) Bestimme eine partikuläre Lösung von (3) durch *Variation der Konstanten.* (7P)

(d) Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3). (1P)

Lösung zu Aufgabe 3

(a) **Wronski-Test:** Test auf lineare Unabhängigkeit der Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ einer homogenen Differentialgleichung. Hierfür muss die Wronski-Matrix 3 Punkte

$$\det W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix} \neq 0$$

für **ein** (und damit für alle) t im Definitionsbereich sein.

(b) **Homogene Lösungen:** 2 Punkte

$$x_1: \quad 12\,t^2 - 8\,t^2 - 4\,t^2 = 0 \quad \checkmark$$
$$x_2: \quad 2\,t^{-3} + 2\,t^{-3} - 4\,t^{-3} = 0 \quad \checkmark$$

Fundamentalsystem: Lineare Unabhängigkeit: 3 Punkte

$$\det W(1) = \begin{vmatrix} t^4 & t^{-1} \\ 4t^3 & -t^{-2} \end{vmatrix}_{t=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Vollständigkeit: Ordnung 2 1 Punkte

(c) **Ansatz und Gleichungssystem:** 4 Punkte

$$\begin{pmatrix} t^4 & t^{-1} \\ 4t^3 & -t^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30t^3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{5t^2} \begin{pmatrix} -t^{-2} & -t^{-1} \\ -4t^3 & t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 30t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6t^5 \end{pmatrix}$$

Integration der Ableitungen: 2 Punkte

$$C_1(t) = 6t, \qquad C_2(t) = -t^6$$

Partikuläre Lösung: 1 Punkt

$$x_p(t) = 6t \cdot t^4 - t^6 \cdot t^{-1} = 5t^5$$

(d) **Allgemeine Lösung:** 1 Punkt

$$x(t) = 5t^5 + C_1 t^4 + C_2 t^{-1} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 4 (*Laplace-Ansatz für gewöhnliche Differentialgleichungen*) (15 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) + 2\,x(t) = t\sin(2t), \quad x(0) = -1. \tag{4}$$

(a) Was ist eine stückweise stetige Funktion exponentieller Ordnung? (4P)

(b) Wie und unter welchen Voraussetzungen kann die Laplace-Transformation invertiert werden? (3P)

(c) Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ sei stetig und von exponentieller Ordnung. Beweise die Multiplikationsregel

$$\mathcal{L}[t\,f(t)](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[f(t)](s).$$ (3P)

Hinweis: Die Existenz der Integrale/Ableitungen darf vorausgesetzt werden. Integration und Differentiation dürfen ohne Begründung vertauscht werden.

(d) Nutze (b), um die Laplace-Transformierte von $f(t) = t\sin(2t)$ zu berechnen. (2P)

(e) Nutze (c), um die Laplace-transformierte Lösung $\mathcal{L}[x(t)](s)$ von (4) zu berechnen. (3P)
Hinweis: Die Rücktransformation ist nicht erforderlich.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) **Stückweise Stetigkeit:** f hat auf jedem beschränkten Intervall höchstens endlich viele Sprungstellen. Der rechts- und linksseitige Grenzwert existiert an allen Sprungstellen. **2 Punkte**
Exponentielle Ordnung γ: Es gibt ein $C > 0$, sodass **2 Punkte**

$$|f(t)| \leq C\,\mathrm{e}^{\gamma t} \quad \forall t > 0.$$

(b) **Laplace-Inversion:** Sei $f\colon [0,\infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung. Ist $\omega \mapsto \mathcal{L}[f](\sigma + \mathrm{i}\omega)$ absolut integrierbar, dann kann f in allen Stetigkeitspunkten $t > 0$ rekonstruiert werden durch **3 Punkte**

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + \mathrm{i}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + \mathrm{i}\omega)\,\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)\,t}\,\mathrm{d}\omega.$$

(c) **Multiplikationsregel:** **3 Punkte**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t\,f(t)](s) &= \int_0^\infty t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\mathcal{L}[f(t)](s).\end{aligned}$$

(d) **Laplace-Transformation:** **2 Punkte**

$$\mathcal{L}[t\sin(2t)](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{2}{s^2+4} = \frac{2\cdot 2s}{(s^2+4)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}.$$

(e) **Transformation Differentialgleichung:** **3 Punkte**

$$\begin{aligned}(s\,X(s) + 1) + 2X(s) &= \frac{4s}{s^2+4} \\ \to \quad X(s) &= \frac{4s}{(s+2)(s^2+4)} - \frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*Partielle Differentialgleichungen*) (15 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + (1-x)\,\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 3\sqrt{1-x} - 3, \quad -1 < x < 1,\ t \geq 0. \tag{5}$$

(a) Bestimme (mit Begründung) die Ordnung der Differentialgleichung. (2P)

(b) Verwende den Separationsansatz

$$u(x,t) \coloneqq X(x)\,T(t)$$

und stelle Differentialgleichungen für $X(x)$ und $T(t)$ auf. (4P)

(c) Löse die beiden aufgestellten Differentialgleichungen aus (b). (6P)

(d) Verwende das Superpositionsprinzip für die Lösungen aus (c), um eine Lösung des Anfangswertproblems (5) zu finden. (3P)

Lösung zu Aufgabe 5

(a) **1. Ordnung:** Die höchsten partiellen Ableitungen nach x und t sind vom Grad 1. **2 Punkte**

(b) **Ansatz einsetzen:** **4 Punkte**

$$X(x)\,T'(t) + (1-x)\,X'(x)\,T(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{(1-x)\,X'(x)}{X(x)} \eqqcolon \gamma$$

$$\longrightarrow \quad T'(t) - \gamma T(t) = 0, \quad (1-x)\,X'(x) + \gamma X(x) = 0$$

(c) **Differentialgleichung in T:** **2 Punkte**

$$T'(t) = \gamma T(t) \quad \longrightarrow \quad T_\gamma(t) = \mathrm{e}^{\gamma t}$$

Differentialgleichung in X: **4 Punkte**

$$(1-x)\,X'(x) + \gamma X(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad X'(x) = -\frac{\gamma}{1-x}\,X(x)$$

$$\longrightarrow \quad X_\gamma(x) = \mathrm{e}^{-\gamma \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-\gamma} = (1-x)^\gamma$$

(d) **Superpositionsprinzip:** **3 Punkte**

$$u_\gamma(x,t) \coloneqq \mathrm{e}^{\gamma t}(1-x)^\gamma \quad \longrightarrow \quad u_\gamma(x,0) \coloneqq (1-x)^\gamma$$

$$\longrightarrow \quad u(x,0) = 3u_{1/2}(x,0) - 3u_0(x,0) \quad \longrightarrow \quad u(x,t) = 3\mathrm{e}^{t/2}\sqrt{1-x} - 3$$

Laplacetransformation

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	
1	$1/s$	
t^n	$n!/s^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
e^{at}	$1/(s-a)$	$a \in \mathbb{C}$
$t^{n-1}\mathrm{e}^{at}/(n-1)!$	$1/(s-a)^n$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$

Fouriertransformation

$f(t)$	$\mathcal{F}[f](\omega)$	
$\mathbf{1}_{[-T,T]}$	$2T\,\mathrm{sinc}(\omega T)$	$T > 0$
$\mathrm{e}^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/2}$	
$\mathrm{e}^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(\omega^2+a^2)$	$a > 0$

Stammfunktionen

$f(t)$	$F(t)$	
t^α	$t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \neq -1$
$1/t$	$\ln\lvert t\rvert$	
$1/(1-t)$	$\ln(1/(1-t))$	
e^t	e^t	
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$\sinh(t)$	$\cosh(t)$	
$\cosh(t)$	$\sinh(t)$	