

# Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen (Klausur – Zweitermin)

8. April 2026

Wintersemester 2025/26

<b>NAME:</b>	_____
<b>VORNAME:</b>	_____
<b>MATRIKELNUMMER:</b>	_____
<b>STUDIENGANG:</b>	_____

## Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Ich fühle mich prüfungsfähig.

Datum, Unterschrift

# Musterlösung

## Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
  - Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.
- 

## Klausur

- Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben**.
  - Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
  - Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
  - Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.
  - Die Aufgaben sind ausschließlich mit den **Methoden der Vorlesung** zu lösen.
- 

**Klausureinsicht:** Dienstag, den 14. April 2026, 10:00–11:00 Uhr, H 2038.

### Laplace transformation

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	
1	$1/s$	
$t^n$	$n!/s^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$e^{at}$	$1/(s-a)$	$a \in \mathbb{C}$
$t^{n-1}e^{at}/(n-1)!$	$1/(s-a)^n$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$

### Fourier transformation

$f(t)$	$\mathcal{F}[f](\omega)$	
$1_{[-T,T]}(t)$	$2T \operatorname{sinc}(\omega T)$	$T > 0$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$	
$e^{-a t }$	$2a/(\omega^2+a^2)$	$a > 0$

### Stammfunktionen

$f(t)$	$F(t)$	
$t^\alpha$	$t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \neq -1$
$1/t$	$\ln t $	
$1/(1-t)$	$\ln(1/(1-t))$	$t < 1$
$e^t$	$e^t$	
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$\sinh(t)$	$\cosh(t)$	
$\cosh(t)$	$\sinh(t)$	
$1/\sqrt{1-t^2}$	$\arcsin(t)$	$ t  \leq 1$
$1/(t^2+1)$	$\arctan(t)$	
$1/(t \ln(t))$	$\ln( \ln(t) )$	$t > 0, t \neq 1$

**Aufgabe 1** (*Separable Differentialgleichungen*)

[15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 3t^2 \sqrt{1 - x^2(t)}, \quad (1a)$$

$$x\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1b)$$

- (a) Begründe, warum die Lösung des Anfangswertproblems (1a–1b) eindeutig ist. [4P]
- (b) Begründe, warum die Differentialgleichung (1a) *separabel* ist. [2P]
- (c) Bestimme alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung (1a). [2P]
- (d) Löse das Anfangswertproblem (1a–1b) durch Trennung der Veränderlichen. [6P]  
*Hinweis:*  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$ .
- (e) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der in (d) berechneten Lösung. [1P]



**Aufgabe 3** (*Differentialgleichungen höherer Ordnung*)

[17 Punkte]

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - 2t^{-2}x(t) = 4t, \quad t > 0. \quad (3)$$

- (a) Schreibe (3) in das zugehörige lineare Differentialgleichungssystem um. [3P]
- (b) Zeige, dass  $x_1(t) := t^2$  und  $x_2(t) := t^{-1}$  die zugehörige homogene Differentialgleichung von (3) lösen und ein Fundamentalsystem bilden. [6P]
- (c) Bestimme eine partikuläre Lösung von (3) durch Variation der Konstanten. [7P]
- (d) Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3). [1P]

**Aufgabe 4** (*Laplace-Ansatz für gewöhnliche Differentialgleichungen*)

[15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x''(t) + 4x(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ \cos(2(t-3)), & t \geq 3, \end{cases} \quad (4a)$$

$$x'(0) = -1, \quad x(0) = 0. \quad (4b)$$

- (a) Begründe, warum die rechte Seite von (4a) stückweise stetig und von exponentieller Ordnung ist. [4P]
- (b) Wie und unter welchen Voraussetzungen kann die Laplace-Transformation mithilfe der Fourier-Transformation berechnet werden? [3P]
- (c) Die Funktion  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig und von exponentieller Ordnung. Für  $t_0 \geq 0$ , beweise den Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](s) = e^{-st_0} \mathcal{L}[f(t)](s). \quad [3P]$$

*Hinweis:* Setze  $f(t) := 0$  für  $t < 0$ .

- (d) Nutze (c), um die Laplace-Transformierte der rechten Seite von (4a) zu berechnen. [2P]
- (e) Nutze (d), um die Laplace-transformierte Lösung  $X(s)$  von (4a–4b) zu berechnen. [3P]  
*Hinweis:* Die Rücktransformation ist nicht erforderlich.

**Aufgabe 5** (*Partielle Differentialgleichungen*)

[15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - x \ln(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (5a)$$

$$u(x, 0) = \ln(x) - \frac{5}{\ln(x)}, \quad (5b)$$

$$x > 1, t \geq 0. \quad (5c)$$

- (a) Bestimme die Ordnung der Differentialgleichung (5a). Begründe deine Antwort. [2P]  
(b) Verwende den Separationsansatz

$$u(x, t) := X(x) T(t)$$

und stelle Differentialgleichungen für  $X(x)$  und  $T(t)$  auf. [4P]

- (c) Löse die beiden in Teil (b) aufgestellten Differentialgleichungen. [6P]  
(d) Verwende das Superpositionsprinzip für die Lösungen aus (c), um eine Lösung des Anfangswertproblems (5a–5c) zu finden. [3P]