Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen
(Klausur – Zweitermin)

8. April 2026 Wintersemester 2025/26

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: ______________________

Erklärung des Studierenden / der Studierenden:

Hiermit erkläre ich, dass

- mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).
- mir bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Ich fühle mich prüfungsfähig.

Datum, Unterschrift

Musterlösung

Hilfsmittel

- Zugelassen ist ein **doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt** mit Notizen.
- Taschenrechner und Formelsammlungen sind **nicht zugelassen**.

Klausur

- Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben**.
- Zum Bestehen sind **40/80 Punkte** hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Die **Lösungen inklusive Rechenweg/Begründung** sind mit einem **dokumentenechten** Stift auf dem **bereitgestellten Papier** abzugeben.
- Die Aufgaben sind ausschließlich mit den **Methoden der Vorlesung** zu lösen.

Klausureinsicht: Dienstag, den 14. April 2026, 10:00–11:00 Uhr, H 2038.

Laplacetransformation

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	
1	$1/s$	
t^n	$n!/s^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
e^{at}	$1/(s-a)$	$a \in \mathbb{C}$
$t^{n-1}e^{at}/(n-1)!$	$1/(s-a)^n$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{s}$	
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$	$a \in \mathbb{R}$

Fouriertransformation

$f(t)$	$\mathcal{F}[f](\omega)$	
$\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$	$2T\operatorname{sinc}(\omega T)$	$T > 0$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$	
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(\omega^2+a^2)$	$a > 0$

Stammfunktionen

$f(t)$	$F(t)$	
t^α	$t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$	$\alpha \neq -1$
$1/t$	$\ln\lvert t\rvert$	
$1/(1-t)$	$\ln(1/(1-t))$	$t < 1$
e^t	e^t	
$\sin(t)$	$-\cos(t)$	
$\cos(t)$	$\sin(t)$	
$\sinh(t)$	$\cosh(t)$	
$\cosh(t)$	$\sinh(t)$	
$1/\sqrt{1-t^2}$	$\arcsin(t)$	$\lvert t\rvert \leq 1$
$1/(t^2+1)$	$\arctan(t)$	
$1/(t\ln(t))$	$\ln(\lvert\ln(t)\rvert)$	$t > 0, t \neq 1$

Aufgabe 1 (*Separable Differentialgleichungen*) [15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 3t^2\sqrt{1 - x^2(t)}, \tag{1a}$$

$$x\Big(\big(\tfrac{\pi}{3}\big)^{1/3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1b}$$

(a) Begründe, warum die Lösung des Anfangswertproblems (1a–1b) eindeutig ist. [4P]

(b) Begründe, warum die Differentialgleichung (1a) *separabel* ist. [2P]

(c) Bestimme alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung (1a). [2P]

(d) Löse das Anfangswertproblem (1a–1b) durch Trennung der Veränderlichen. [6P]
Hinweis: $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

(e) Bestimme den maximalen Definitionsbereich der in (d) berechneten Lösung. [1P]

Lösung zu Aufgabe 1

(a) **Existenz- und Eindeutigkeitssatz:**

$$G(t,\eta) \coloneqq 3t^2\sqrt{1-\eta^2}$$

$$\longrightarrow \quad \tfrac{\partial}{\partial t}G(t,\eta) = 6t\sqrt{1-\eta^2}, \quad \tfrac{\partial}{\partial \eta}G(t,\eta) = \frac{-3t^2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

$\longrightarrow$ partielle Ableitungen stetig auf der offenen Menge $U = \mathbb{R} \times (-1,1)$

$\longrightarrow$ Eindeutigkeit wegen $(({}^{\pi}/_{3})^{1/3}, {}^{\sqrt{3}}/_{2}) \in U$.

(b) **Separabel:** Die Differentialgleichung hat die Form

$$x'(t) = f(t)\, g(x(t))$$

für stetige Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 3t^2; \qquad g\colon [-1,1] \to [0,\infty), \quad \eta \mapsto \sqrt{1-\eta^2}.$$

(c) **Konstante Lösungen:**

$$g(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \eta = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad x(t) = 1 \text{ und } x(t) = -1$$

(d) **Trennung der Veränderlichen:**

$$\int_{t_0}^{t} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{(\pi/3)^{1/3}}^{t} 3\xi^2\,\mathrm{d}\xi = \Big[\xi^3\Big]_{(\pi/3)^{1/3}}^{t} = t^3 - \tfrac{\pi}{3}$$

$$= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,\mathrm{d}\eta = \int_{\sqrt{3}/2}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,\mathrm{d}\eta = \Big[\arcsin(\eta)\Big]_{\sqrt{3}/2}^{x(t)} = \arcsin(x(t)) - \tfrac{\pi}{3}$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \sin(t^3)$$

(e) **Wertebereich Arkussinus:**

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Maximaler Definitionsbereich:

$$t^3 \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \longrightarrow \quad t \in \left[-\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Aufgabe 2 (*Lineare Differentialgleichungssysteme*) [18 Punkte]

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Hinweis: $\vec{v} \coloneqq (0, 1, 1)^\top$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

(a) Bestimme die Dimension des Lösungsraums von (2). Begründe deine Antwort. [2P]

(b) Bestimme die allgemeine, reellwertige Lösung des Systems (2). [12P]

(c) Bestimme mithilfe von (b) eine Lösung mit Anfangswert $\vec{x}(0) = (0, 1, 2)^\top$. [2P]

(d) Begründe, warum die Lösung in (c) eindeutig ist. [2P]

Lösung zu Aufgabe 2

(a) **Dimension:** 3, da $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$.

(b) **Charakteristisches Polynom:**

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4). \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2\mathrm{i}$$

Eigenvektor zu 2i:

$$\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & -4 & 4 \\ 0 & 1-2\mathrm{i} & 0 \\ -1 & 1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$
$$\longrightarrow \quad v_2 = 0,\ -2\mathrm{i}\, v_1 + 4v_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad v_1 = -2\mathrm{i}\, v_3 \quad \longrightarrow \quad \text{z.B. } \vec{v} = (-2\mathrm{i}, 0, 1)^\top$$

Real- und Imaginärteil bestimmen:

$$\vec{x}_2(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \big(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)\big) \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 0 \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = C_1\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 0 \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \qquad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

(c) **Anpassen an Anfangswert:**

$$\vec{x}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad C_1 = C_2 = 1,\ C_3 = 0.$$

$$\longrightarrow \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t + \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

(d) **Eindeutigkeit:** System-Matrix (konstant) und rechte Seite (null) sind stetig auf $\mathbb{R}$. Damit folgt die Eindeutigkeit aus dem EES für Systeme.

Aufgabe 3 (*Differentialgleichungen höherer Ordnung*) [17 Punkte]

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung

$$x''(t) - 2t^{-2}\,x(t) = 4t, \qquad t > 0. \tag{3}$$

(a) Schreibe (3) in das zugehörige lineare Differentialgleichungssystem um. [3P]

(b) Zeige, dass $x_1(t) \coloneqq t^2$ und $x_2(t) \coloneqq t^{-1}$ die zugehörige homogene Differentialgleichung von (3) lösen und ein Fundamentalsystem bilden. [6P]

(c) Bestimme eine partikuläre Lösung von (3) durch Variation der Konstanten. [7P]

(d) Bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (3). [1P]

Lösung zu Aufgabe 3

(a) **Lineares System:** Setze $x_k(t) \coloneqq x^{(k-1)}(t)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix}.$$

(b) **Homogene Lösungen:**

$$\begin{aligned} x_1: &\quad 2 - 2 = 0 \quad \checkmark \\ x_2: &\quad 2\,t^{-3} - 2\,t^{-3} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Fundamentalsystem: Lineare Unabhängigkeit:

$$\det W(1) = \begin{vmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{vmatrix}_{t=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Vollständigkeit: Ordnung 2

(c) **Ansatz und Gleichungssystem:**

$$\begin{pmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -t^{-2} & -t^{-1} \\ -2t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3\, t^3 \end{pmatrix}$$

Integration der Ableitungen:

$$C_1(t) = \tfrac{4}{3}\, t, \qquad C_2(t) = -\tfrac{1}{3}\, t^4$$

Partikuläre Lösung:

$$x_{\mathrm{p}}(t) = \tfrac{4}{3}\, t \cdot t^2 - \tfrac{1}{3}\, t^4 \cdot t^{-1} = t^3$$

(d) **Allgemeine Lösung:**

$$x(t) = t^3 + C_1 t^2 + C_2 t^{-1} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 4 (*Laplace-Ansatz für gewöhnliche Differentialgleichungen*) [15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$x''(t) + 4\,x(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ \cos(2(t-3)), & t \geq 3, \end{cases} \tag{4a}$$

$$x'(0) = -1,\ x(0) = 0. \tag{4b}$$

(a) Begründe, warum die rechte Seite von (4a) stückweise stetig und von exponentieller Ordnung ist. [4P]

(b) Wie und unter welchen Voraussetzungen kann die Laplace-Transformation mithilfe der Fourier-Transformation berechnet werden? [3P]

(c) Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ sei stetig und von exponentieller Ordnung. Für $t_0 \geq 0$, beweise den Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = \mathrm{e}^{-st_0}\mathcal{L}[f(t)](s). \qquad [3P]$$

Hinweis: Setze $f(t) \coloneqq 0$ für $t < 0$.

(d) Nutze (c), um die Laplace-Transformierte der rechten Seite von (4a) zu berechnen. [2P]

(e) Nutze (d), um die Laplace-transformierte Lösung $X(s)$ von (4a–4b) zu berechnen. [3P]
Hinweis: Die Rücktransformation ist nicht erforderlich.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) **Stückweise Stetigkeit:** $f(t) \coloneqq u_3(t)\cos(2(t-3))$ ist stetig auf $[0,3) \cup (3,\infty)$. Die Grenzwerte $f(3+) = 1$ und $f(3-) = 0$ existieren.
Exponentielle Ordnung:

$$|f(t)| \leq \mathrm{e}^{0t} \quad \forall t \geq 0.$$

(b) **Zusammenhang:** Setze $f(t) \coloneqq 0$ für $t < 0$ und $s = \sigma + \mathrm{i}\omega$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\sigma t} f(t)](\omega),$$

falls $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sigma t} f(t)$ absolut integrierbar ist.

(c) **Verschiebungssatz:**

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](s) = \int_0^\infty f(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-s(t+t_0)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-st_0}\,\mathcal{L}[f(t)](s).$$

(d) **Laplace-Transformation:**

$$\mathcal{L}[u_3(t)\cos(2(t-3))](s) = \mathrm{e}^{-3s}\,\mathcal{L}[\cos(2t)](s) = \mathrm{e}^{-3s}\,\frac{s}{s^2+4}.$$

(e) **Transformation Differentialgleichung:**

$$\begin{aligned} &(s^2 X(s) + 1) + 4X(s) = \mathrm{e}^{-3s}\,\frac{s}{s^2+4} \\ \rightarrow \quad & X(s) = \mathrm{e}^{-3s}\,\frac{s}{(s^2+4)^2} - \frac{1}{s^2+4} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*Partielle Differentialgleichungen*) [15 Punkte]

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - x\ln(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{5a}$$

$$u(x,0) = \ln(x) - \frac{5}{\ln(x)}, \tag{5b}$$

$$x > 1,\; t \geq 0. \tag{5c}$$

(a) Bestimme die Ordnung der Differentialgleichung (5a). Begründe deine Antwort. [2P]

(b) Verwende den Separationsansatz

$$u(x,t) \coloneqq X(x)\,T(t)$$

und stelle Differentialgleichungen für $X(x)$ und $T(t)$ auf. [4P]

(c) Löse die beiden in Teil (b) aufgestellten Differentialgleichungen. [6P]

(d) Verwende das Superpositionsprinzip für die Lösungen aus (c), um eine Lösung des Anfangswertproblems (5a–5c) zu finden. [3P]

Lösung zu Aufgabe 5

(a) **1. Ordnung:** Die höchsten partiellen Ableitungen nach x und t sind vom Grad 1.

(b) **Ansatz einsetzen:**

$$X(x)\,T'(t) - x\ln(x)\,X'(x)\,T(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{x\ln(x)\,X'(x)}{X(x)} =: \gamma$$

$$\longrightarrow \quad T'(t) - \gamma T(t) = 0, \quad x\ln(x)\,X'(x) - \gamma X(x) = 0$$

(c) **Differentialgleichung in T:**

$$T'(t) = \gamma T(t) \quad \longrightarrow \quad T_\gamma(t) = \mathrm{e}^{\gamma t}$$

Differentialgleichung in X:

$$x\ln(x)\,X'(x) - \gamma X(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad X'(x) = \frac{\gamma}{x\ln(x)}\,X(x)$$

$$\longrightarrow \quad X_\gamma(x) = \mathrm{e}^{\gamma\ln(|\ln(x)|)} = |\ln(x)|^\gamma = \ln^\gamma(x)$$

(d) **Superpositionsprinzip:**

$$u_\gamma(x,t) = \mathrm{e}^{\gamma t}\ln^\gamma(x) \quad \longrightarrow \quad u_\gamma(x,0) = \ln^\gamma(x)$$

$$\longrightarrow \quad u(x,0) = \ln(x) - \frac{5}{\ln(x)} = u_1(x,0) - 5u_{-1}(x,0)$$

$$\longrightarrow \quad u(x,t) = \mathrm{e}^{t}\ln(x) - \mathrm{e}^{-t}\,\frac{5}{\ln(x)}$$