Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS17
Penn-Karras 2.8.2017

Juli – Klausur
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen und die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlung sind nicht zugelassen. Es dürfen keinerlei elektronische oder internetfähige Geräte wie Handys, Smartwatches etc. verwendet werden.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe

9 Punkte

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für das System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ definiert als

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < t \leq 3 \\ 0 & \text{für } t > 3. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von f.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 25y = f(t), \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = 5u_{xx}$$

die von der Form $u(x,t) = F(x)G(t)$ sind mit der Eigenschaft, dass $G(t)$ für $t \to \infty$ gegen Null strebt, d.h.

$$\lim_{t \to \infty} G(t) = 0.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen aus Teil (a), welche die Randbedingungen

$$u_x(0,t) = u(\pi/2,t) = 0 \text{ erfüllen.}$$

c) Bestimmen Sie alle Lösungen aus Teil (b), welche die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = 3\cos x - 2\cos 3x \text{ erfüllen.}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

11 Punkte

Wir betrachten ein LTI-System S, welches für die Eingangsgröße

$$F(t) = e^{-t}$$

die Ausgangsgröße (Systemantwort)

$$S[F](t) = e^{-t} - e^{2t}$$

liefert.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des Systems.

b) Bestimmen Sie die Systemantwort $y = S[e^{2t}]$ auf die Eingangsgröße

$$f(t) = e^{2t}.$$

c) Welche Funktion $g : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ erfüllt

$$S[g](t) = t^2 e^{2t}?$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?
Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Es gibt **2 Punkte** für jeden Teil. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.

a) Das Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ habe die (spezielle) Lösung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist auch $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems.

b) Es gibt eine lineare, homogene Dgl. 4.Ordnung mit konstanten, reellen Koeffizienten, welche

$$y_1(t) = te^{2t} \sin t \text{ und } y_2(t) = e^{5t}$$

als Lösungen hat.

c) Die einzige Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
des Anfangswertproblems für die separable Dgl.

$$y' = e^{17y^3 + \cos^6 x}(3 - y)^2, \quad y(0) = 3$$

ist $y(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Für die Laplacetansformierte von e^{-t^2} gilt

$$\mathcal{L}[e^{-(t-3)^2}](s) = e^{-3s}\mathcal{L}[e^{-t^2}](s).$$

e) Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$u(x, t) = \sin(3x - t)$$

ist eine Lösung der Wellengleichung

$$9u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t).$$

6. Aufgabe

9 Punkte

Sei $u : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{C}$ (Fourier-transformierbar bzgl. x) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u_t(x, t) = -3u_{xxxx}(x, t), \quad u(x, 0) = e^{-|x|/6}.$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von u bzgl. der Variablen x:

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\omega x} dx.$$

Hinweis : Es gilt

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$