Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Gündel vom-Hofe

SS18
1.8.2018

Juli – Klausur
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben.
Mit Bleistift oder in Rot geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes Din-A4 Blatt mit Notizen und die Laplacetabelle benutzt werden. Weitere Hilfsmittel, wie z.B. Taschenrechner und Formelsammlung sind nicht zugelassen. Es dürfen keinerlei elektronische oder internetfähige Geräte wie Handys, Smartwatches etc. verwendet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.
Begründen Sie Ihre Schritte, wenn nichts anderes gesagt ist.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt (Deckblatt und **6** Aufgaben, insgesamt **4** Seiten) vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann.
- Ihnen ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist.
(Paragraph 39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen ist bekannt, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für das inhomogene System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie für das homogene System das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

a) Bestimmen Sie eine lineare homogene Dgl. von möglichst niedriger Ordnung mit konstanten, reellen Koeffizienten, welche

$$y_1(t) = \cos 2t \text{ und } y_2(t) = te^{-t}$$

als Lösungen hat. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser homogenen Dgl.

b) Wir betrachten nun die zu (a) gehörende inhomogene Dgl. mit Inhomogenität $f(t) = te^t + \sin 2t$.

Geben Sie einen Ansatz vom Typ der rechten Seite für eine spezielle Lösung dieser Dgl. an. Ausrechnen der Koeffizienten ist nicht verlangt.

3. Aufgabe

11 Punkte

Für eine gegebene Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(t) + \int_0^t e^{2(t-r)} y(r) dr = \int_0^t e^{2(t-r)} f(r) dr, \quad y(0) = 0.$$

a) Bestimmen Sie mit der Laplace-Transformation die Lösung dieses Anfangswertproblems im Fall $f(t) = 4e^t$.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion und Impulsantwort des LTI-Systems, das die Funktion $y : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ als Systemantwort $y = S[f]$ auf die Eingangsgröße f liefert.

Hinweis : Verwenden Sie den Faltungssatz für den Integralterm.

4. Aufgabe

8 Punkte

Sei $u : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{C}$ (Fourier-transformierbar bzgl. x) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x,t), \quad u(x,0) = e^{-|x|}.$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von u bzgl. der Variablen x:

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx.$$

Hinweis : Es gilt

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

5. Aufgabe

11 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = (\sin t) u_{xx}$$

die von der Form $u(x,t) = F(x)G(t)$ sind und die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \text{ erfüllen.}$$

b) Bestimmen Sie durch Überlagerung der Lösungen aus Teil (a) die Lösung des Rand-Anfangswertproblems , welche zusätzlich die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 7 \sin 3x - 2 \sin 6x \text{ erfüllt.}$$

Hinweis : Es genügt, (ohne Begründung) nur die Fälle zu betrachten, in denen Sinus- und Cosinus-Funktionen in der allgemeinen Lösung der Gleichung für F auftreten.

6. Aufgabe

12 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?
Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Es gibt **3 Punkte** für jeden Teil. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.

a) Seien f, g S-Funktionen. Dann gilt für ihre Faltung:

$$t(f * g)(t) = (tf(t)) * g(t) + f(t) * (tg(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Faltungs- und Multiplikationssatz.

b) Es gilt für die (bei $t = 3$ von Null auf 1 springende) Heavisidefunktion u_3:

$$\mathcal{L}[tu_3(t)](s) = e^{-3s}\frac{1}{s^2}.$$

c) Das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi/2 \end{pmatrix}.$$

hat die eindeutig bestimmte (maximale) Lösung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi/2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Das Anfangswertproblem für die separable Dgl.

$$y' = e^{\sin y}, \quad y(0) = 0$$

hat die eindeutig bestimmte (maximale) Lösung $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.