Berlin, 21. Februar 2013

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Klausur Informatik-Propädeutikum

(Niedermeier/Hartung/Nichterlein, Wintersemester 2012/13)

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
Σ	

Bearbeitungszeit:	90 min.
max. Punktezahl:	60 Punkte
min. Punktezahl zum Bestehen:	20 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Stable Matching (Gale und Shapley)** (2+2+2+2 Punkte)

Sei die Menge der Männer $M = \{A, B, C\}$ und die Menge der Frauen $F = \{1, 2, 3\}$ mit folgenden Präferenzlisten gegeben:

$$\begin{array}{ll} A : 1 > 2 > 3, & 1 : B > C > A \\ B : 2 > 3 > 1, & 2 : C > A > B \\ C : 1 > 2 > 3, & 3 : A > B > C \end{array}$$

(a) Geben Sie eine „männeroptimale" stabile Zuordnung an (ohne Begründung).

(b) Geben Sie eine „frauenoptimale" stabile Zuordnung an (ohne Begründung).

(c) Gibt es immer eine stabile Zuordnung, welche sowohl männeroptimal als auch frauenoptimal ist? Hinweis: Sie können z. B. beweisen, dass dies nicht stimmt indem Sie Präferenzlisten angeben für welche dies nicht der Fall sein kann.

(d) Geben Sie Präferenzlisten mit mindestens jeweils 3 Männern und Frauen an, welche eine stabile Zuordnung zulassen, welche sowohl männer- als auch frauenoptimal ist.

Hinweis: Eine stabile Zuordnung wird **männer-(frauen-)optimal** genannt, wenn es keine andere stabile Zuordnung gibt, welche mindestens einen Mann (Frau) besser stellt, d. h. er (sie) bekommt eine(n) Frau (Mann) mit höherer Präferenz. Der Gale-Shapley Algorithmus liefert immer eine männeroptimale Lösung.

Zur Erinnerung:

Eine Zuordnung der Männer M zu den Frauen W ist eine **stabile** Zuordnung, falls für jeden $m \in M$ und jede $w \in W$ die nicht m zugeordnet ist gilt:

(a) m zieht die ihm zugeordnete w' gegenüber w vor, oder

(b) w zieht den ihr zugeordneten m' gegenüber m vor.

Propose&Reject [Gale, Shapley 1962]

Initialisiere alle $m \in M$ und alle $w \in W$ als „frei"
while $\exists m \in M$: m ist frei und $\exists w \in W$ der m noch keinen Antrag gemacht hat
    $w \leftarrow$ erste noch „unbeantragte" Frau in m's Präferenzfolge
    if w ist frei **then:**
        (m, w) wird Paar, $m \leftarrow$„verlobt", $w \leftarrow$„verlobt"
    else if w zieht m ihrem aktuellen „Verlobten" m' vor **then:**
        (m, w) wird Paar, $m \leftarrow$„verlobt", $w \leftarrow$„verlobt", $m' \leftarrow$„frei"
    else: w lehnt m ab

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 2: **Heuristiken für Vertex Cover** (2 + 2 + 3 Punkte)

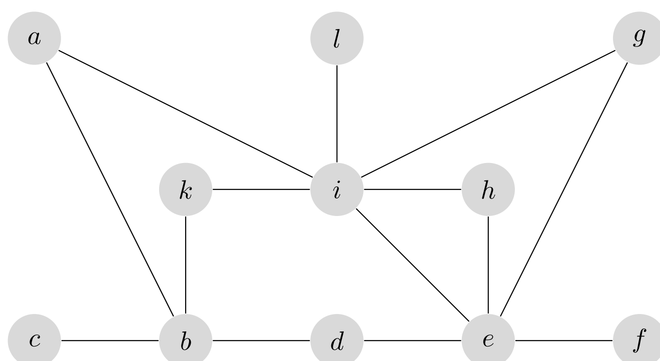
Vertex Cover wurde in der Vorlesung wie folgt definiert:

Vertex Cover
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G.
Aufgabe: Finde eine kleinstmögliche Knotenmenge in G, sodass jede Kante mindestens einen dieser Knoten als Endpunkt hat.

Gegeben sind die folgenden beiden Heuristiken für Vertex Cover und folgender Graph G:

Heuristik 1: Solange es eine Kante gibt, wähle irgendeine, nehme beide Endpunkte dieser Kante in die Lösungsmenge und lösche diese zwei Knoten aus dem Graph.

Heuristik 2: Solange es eine Kante gibt, nehme einen Knoten mit der höchsten Anzahl anliegender Kanten in die Lösungsmenge und lösche ihn aus dem Graph.



(a) Geben Sie für den gegebenen Graph (siehe obiges Bild) jeweils eine von Heuristik 1 und eine von Heuristik 2 erzeugte Lösungsmenge an (ohne Begründung).

(b) Ist eine der zwei erzeugten Lösungsmengen optimal (d.h. kleinstmöglich)?

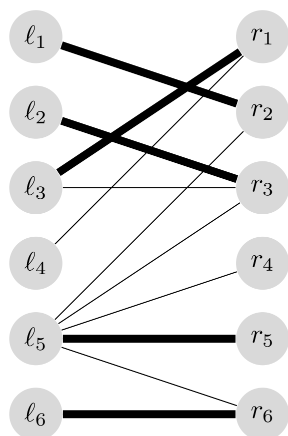
(c) Nur eine der beiden Heuristiken ist eine Faktor-2-Approximation, d.h. die von dieser Heuristik gelieferten Lösungsmengen sind bei beliebigen Eingabegraphen maximal doppelt so groß wie die optimalen Lösungsmengen. Welche der beiden Heuristiken ist die Faktor-2-Approximation?

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

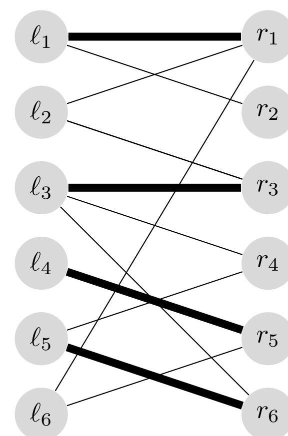
Aufgabe 3: **Bipartites Matching** (6 Punkte)

Gegeben sind folgende zwei bipartite Graphen G_1 und G_2.

G_1



G_2



Die fett gezeichneten Kanten geben ein Matching in den jeweiligen Graphen an. Sind die beiden angegeben Matchings größtmöglich? Wenn nicht, geben Sie ein größtmögliches Matching an.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Algorithmische Komplexität** (4+4 Punkte)

Für aussagenlogische Variablen spricht man von einer Klausel, wenn eine beliebige Anzahl von Literalen (für eine Variable x sind x und $\overline{x}$ die dazugehörigen Literale) durch ein logisches ODER verknüpft wird. Eine aussagenlogische Formel befindet sich in konjunktiver Normalform, falls sie aus durch ein logisches UND verketteten Klauseln besteht.

Beispiel: $\underbrace{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_5)}_{\text{Klausel}} \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$

Eine aussagenlogische Formel heißt **erfüllbar**, falls es eine Belegung der Variablen mit 0 oder 1 gibt, sodass die Formel sich zu 1 auswertet. Obige Formel ist erfüllbar z. B. durch die Belegung $x_1 = 1, \overline{x_3} = 1$ (x_4 und x_5 beliebig).

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme.

SAT
Eingabe: Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform.
Frage: Ist F erfüllbar?

3-SAT
Eingabe: Aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform mit höchstens drei Literalen pro Klausel.
Frage: Ist F erfüllbar?

Beachten Sie, dass beim SAT-Problem jede Klausel beliebig viele Variablen beinhalten kann.

Wir nehmen nun an wir hätten einen Algorithmus $\mathcal{A}^{\text{3-SAT}}$, welcher das 3-SAT-Problem in polynomieller Zeit löst. Wir wollen nun auch das SAT-Problem für eine Formel F in polynomieller Zeit mithilfe des folgenden Algorithmus lösen:

1. Konstruiere eine Formel F', indem jede Klausel $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_m)$ mit $m \geq 4$ in F ersetzt wird durch
$$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee z_1) \wedge (\overline{z_1} \vee \ell_3 \vee z_2) \wedge \ldots \wedge (\overline{z_{m-3}} \vee \ell_{m-1} \vee \ell_m),$$
wobei $z_1, z_2, \ldots, z_{m-3}$ neue Variablen sind, welche bislang noch nicht in F enthalten sind (man führt insbesondere für jede zu ersetzende Klausel neue z-Variablen ein).
2. Löse das 3-SAT-Problem für F' mithilfe des Algorithmus $\mathcal{A}^{\text{3-SAT}}$ und gebe das Ergebnis aus.

Beweisen Sie, dass obiger Algorithmus korrekt ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei X die Menge der Variablen in Formel F und Z die Menge der neu hinzugefügten Variablen in Formel F'.
1) Beweisen Sie, dass wenn F erfüllbar ist, dann auch F'.
2) Beweisen Sie, dass wenn F' erfüllbar ist, dann auch F.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **Ackermannfunktion** (5 Punkte)

Die Ackermann-Funktion f ist wie folgt rekursiv definiert:

$$
\begin{aligned}
f(k,1) &= 2, \\
f(1,n) &= n+2 \text{ für } n>1, \\
f(k,n) &= f(k-1, f(k,n-1)) \text{ für } k,n>1.
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie $f(3,3)$.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 6: **Persönlichkeiten** (2+2+2 Punkte)

Nennen Sie drei zentrale Persönlichkeiten der Informatik und beschreiben Sie jeweils kurz (höchstens drei Sätze) deren herausragende wissenschaftlichen Leistungen.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 7: **Fehlerkorrigierende Codes** (2+4 Punkte)

(a) Welche „Abstandsbedingung für Codewörter“ muss ein Code erfüllen, damit k-Bit-Fehler korrigiert werden können?

(b) Geben Sie eine binäre Codierung der vier Buchstaben a, b, c und d an, sodass:

  i. Alle Codewörter genau Länge fünf haben.

  ii. Fehler von genau einem Bit korrigiert werden können.

  Zeigen Sie, dass die unter (a) genannte Bedingung auch für den von Ihnen entwickelten Code gilt.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

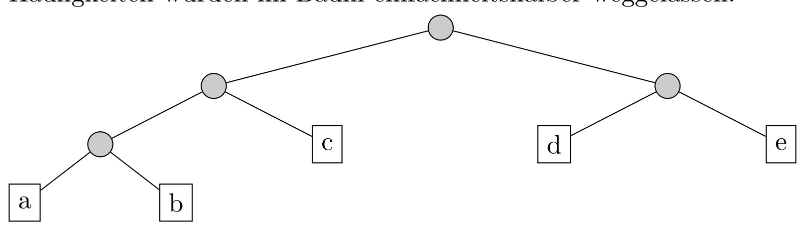
Aufgabe 8: **Huffman-Codierung** (2+4 Punkte)

Der Huffman-Baum zu einer gegebenen relativen Häufigkeit der einzelnen Zeichen wird wie folgt aufgebaut:

Erzeuge für jedes Zeichen x einen Teilbaum mit Knoten x und Gewicht $p_x :=$ relative Häufigkeit von x in M
while Es gibt mehr als einen Teilbaum **do**
    Suche zwei Teilbäume mit kleinsten Gewichten p_1 und p_2
    Vereinige die beiden Teilbäume zu einem mit Gewicht $p_1 + p_2$
end while

Gegeben folgende Häufigkeitsverteilung p für die Zeichen ‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘d’, ‘e’ mit $p(a) = 1/12$, $p(b) = 1/12$, $p(c) = 1/6$, $p(d) = 1/4$, $p(e) = 5/12$.

(a) Gehört folgender Huffman-Baum zur gegebenen Häufigkeitsverteilung? Warum? Die Häufigkeiten wurden im Baum einfachheitshalber weggelassen.



(b) Geben Sie den zur Zeichenkette “fischersfritzefischtfrischefische” zugehörigen Huffman-Baum an. Geben Sie die jeweiligen Gewichte der einzelnen Knoten an. Hinweis: Die betrachtete Zeichenkette hat 33 Zeichen.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 9: **Zentrale Begriffe** (2+2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie in jeweils maximal drei Sätzen Verknüpfungen der Informatik zwischen folgenden Begriffpaaren auf (ggf. mit Beispiel).

a) Zufall und Kryptologie

b) Zufall und algorithmische Komplexität

c) Abstraktion und Computational Thinking

d) Fehlerkorrigierende Codes und Datenkomprimierung