

Lösungsvorschlag zur Klausur vom 23.07.2013

# Lösungsvorschlag

# Theorieaufgaben

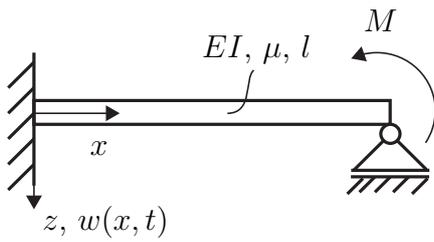
[ 10 Punkte ]

## Aufgabe T1

[ 2 Punkte ]

Geben Sie alle Randbedingungen der skizzierten Systeme an. Unterscheiden Sie dabei zwischen geometrischen und dynamischen Randbedingungen (RB).

Biegeschwingungen  $w(x, t)$



geometrische RB:

$$w(0, t) = 0$$

$$w'(0, t) = 0$$

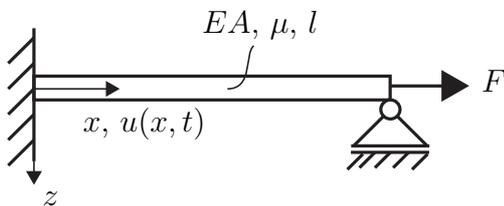
$$w(l, t) = 0$$

1

dynamische RB:

$$-EIw''(l, t) = M$$

Längsschwingungen  $u(x, t)$



geometrische RB:

$$u(0, t) = 0$$

dynamische RB:

$$EAu'(l, t) = F$$

1

**Aufgabe T2**

[ 1 Punkt ]

Die Lösung nach d'Alembert der eindimensionalen Wellengleichung hat die Gestalt

$$w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

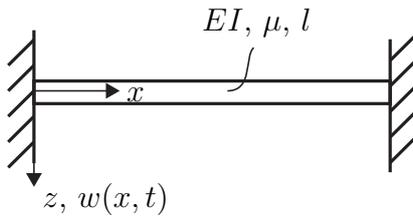
Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in negative x-Richtung laufende Welle? Bitte kreuzen Sie an

|                                |   |   |   |
|--------------------------------|---|---|---|
| <input type="checkbox"/> $f_1$ | <input checked="" type="checkbox"/> $f_2$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ | <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ |
|--------------------------------|---|---|---|

**Aufgabe T3**

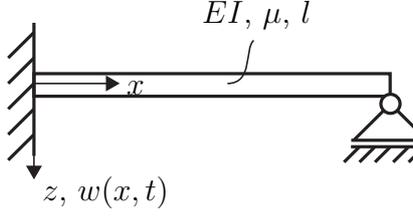
[ 2 Punkte ]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und zweite Eigenform.



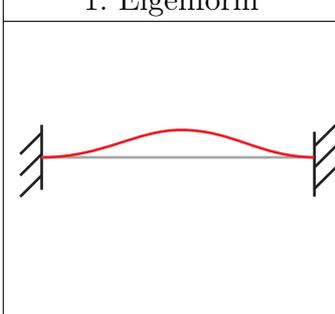
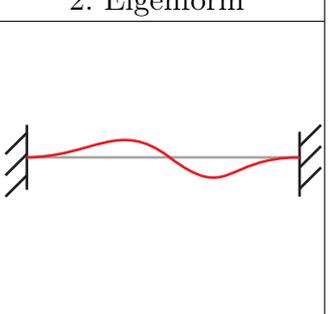
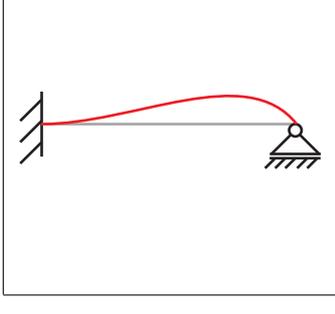
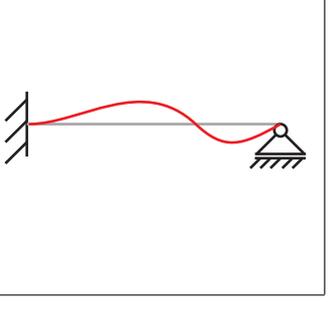
$EI, \mu, l$

$z, w(x, t)$



$EI, \mu, l$

$z, w(x, t)$

| 1. Eigenform   | 2. Eigenform  |
|--|---|
|   |   |
|  |  |

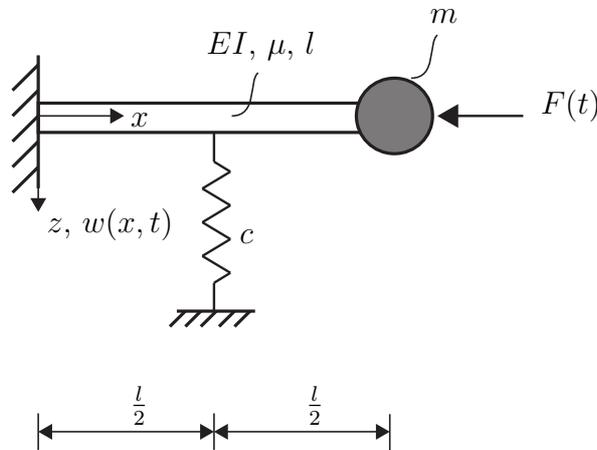
①

①

**Aufgabe T4**

[ 2 Punkte ]

Für das skizzierte System sollen mit Hilfe des Prinzips von Hamilton die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen für die Biegeschwingungen  $w(x, t)$  bestimmt werden. Kreuzen Sie den korrekten Ausdruck für das Prinzip von Hamilton an.

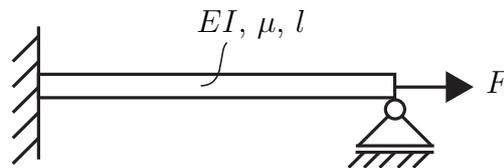


|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/>            | $\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx \right) dt = 0$  |
| <input type="checkbox"/>            | $\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx - \frac{1}{2} c w^2\left(\frac{l}{2}\right) \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} F(t) \delta w(l) dt = 0$   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | $\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx - \frac{1}{2} c w^2\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_0^l F(t) w'^2 dx \right) dt = 0$  |
| <input type="checkbox"/>            | $\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l F(t) w'^2 dx \right) dt$<br>$+ \int_{t_0}^{t_1} (F(t) \delta w(l) - c w\left(\frac{l}{2}\right) \delta w\left(\frac{l}{2}\right)) dt = 0$ |

**Aufgabe T5**

[ 1 Punkt ]

Welchen Einfluss hat eine konstante **positive** Vorspannkraft  $F$  auf die Eigenkreisfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems?



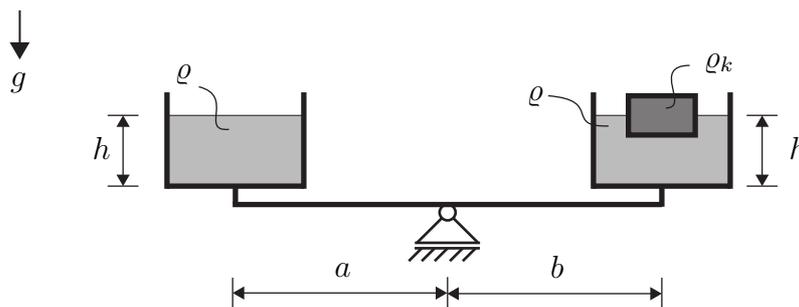
Die Eigenkreisfrequenzen

|  |  |  |
|--|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> werden größer. | <input type="checkbox"/> werden kleiner. | <input type="checkbox"/> bleiben gleich. |
|--|--|--|

**Aufgabe T6**

[ 2 Punkte ]

Auf der skizzierten Waage im Gleichgewicht befinden sich die beiden identischen, mit einer Flüssigkeit der Dichte  $\varrho$  gefüllten Behälter mit gleichen Füllständen  $h$ . Im rechten Behälter schwimmt zudem ein Körper mit Dichte  $\varrho_K$ . Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.



a) Für die Dichten  $\varrho$ ,  $\varrho_K$  gilt:

|   |  |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\varrho > \varrho_K$ | <input type="checkbox"/> $\varrho < \varrho_K$ |
|---|--|

1

b) Für die Hebelarme  $a$ ,  $b$  gilt:

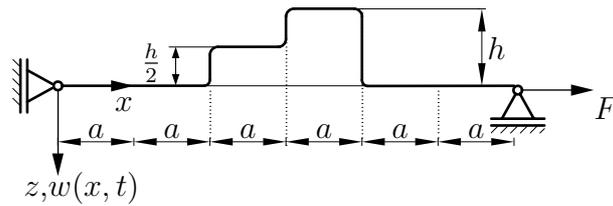
|   |                                  |                                  |
|---|----------------------------------|----------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> $a = b$ | <input type="checkbox"/> $a > b$ | <input type="checkbox"/> $a < b$ |
|---|----------------------------------|----------------------------------|

1

# Aufgabe 1

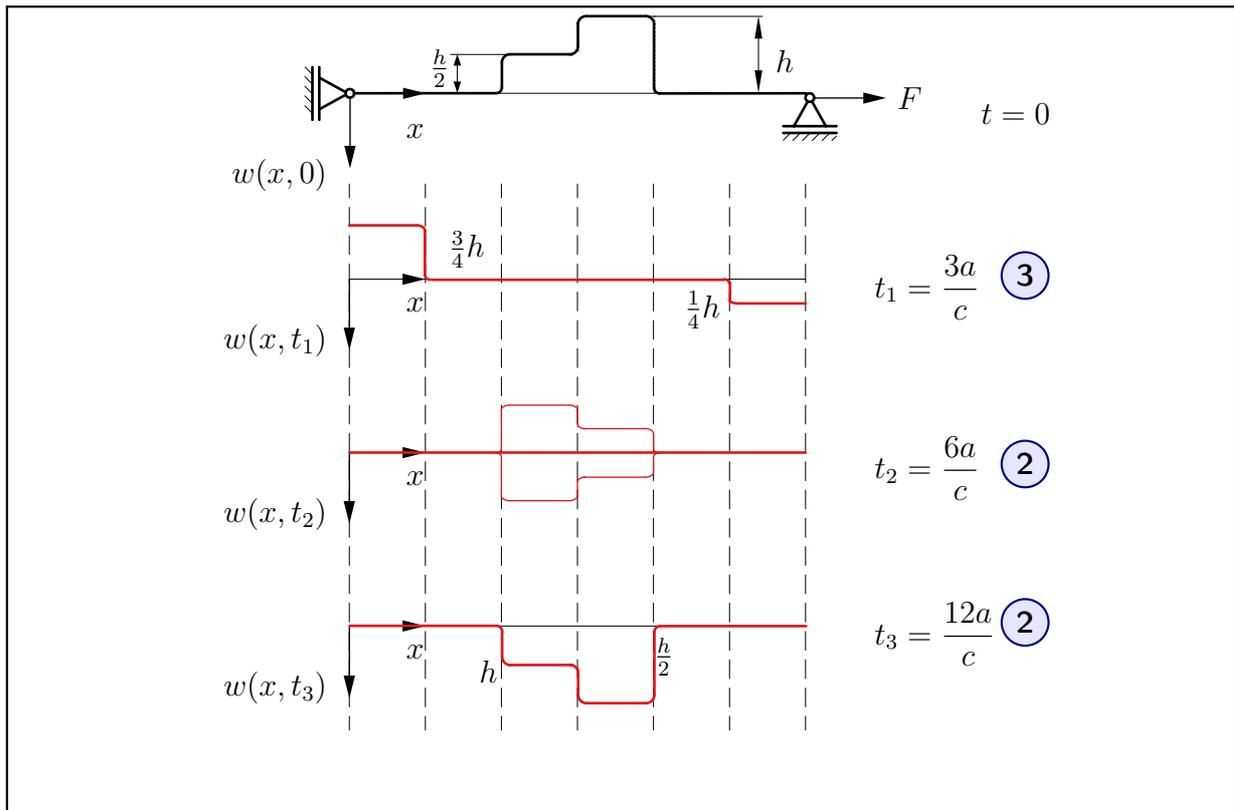
[ 10 Punkte ]

Die vorgespannte, frei-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , Länge  $6a$ , Vorspannkraft  $F$ ) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ( $\dot{w}(x, 0) = 0$ ).



Gegeben:  $c, a, h, F$

- a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten  $t_1 = 3a/c, t_2 = 6a/c, t_3 = 12a/c$  einzeichnen.



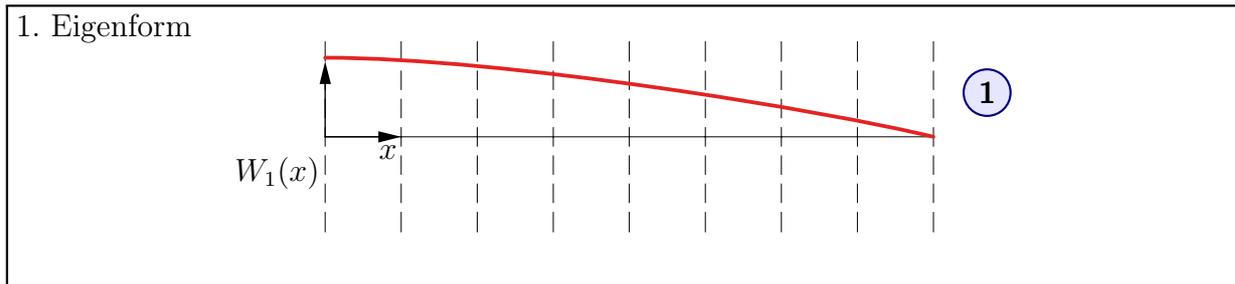
- b) Nach welcher Zeit  $T$  nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

$$T = \frac{24a}{c} \quad \text{①}$$

- c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  des Systems an.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{12a} \quad \text{①}$$

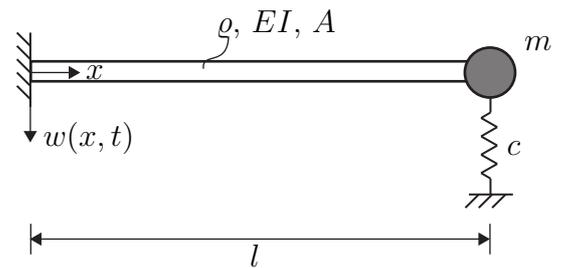
d) Skizzieren Sie die erste Eigenform  $W_1(x)$  des Systems.



## Aufgabe 2

[ 10 Punkte ]

Gegeben ist der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Dichte  $\rho$ , Biegesteifigkeit  $EI$ , Länge  $l$ , Querschnittsfläche  $A$ ) mit einer diskreten Punktmasse (Masse  $m$ ), die sich über eine Feder (Federsteifigkeit  $c$ , entspannt für  $w(l, t) = 0$ ) abstützt.



Gegeben:  $\rho, A, EI, l, m, c$

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:

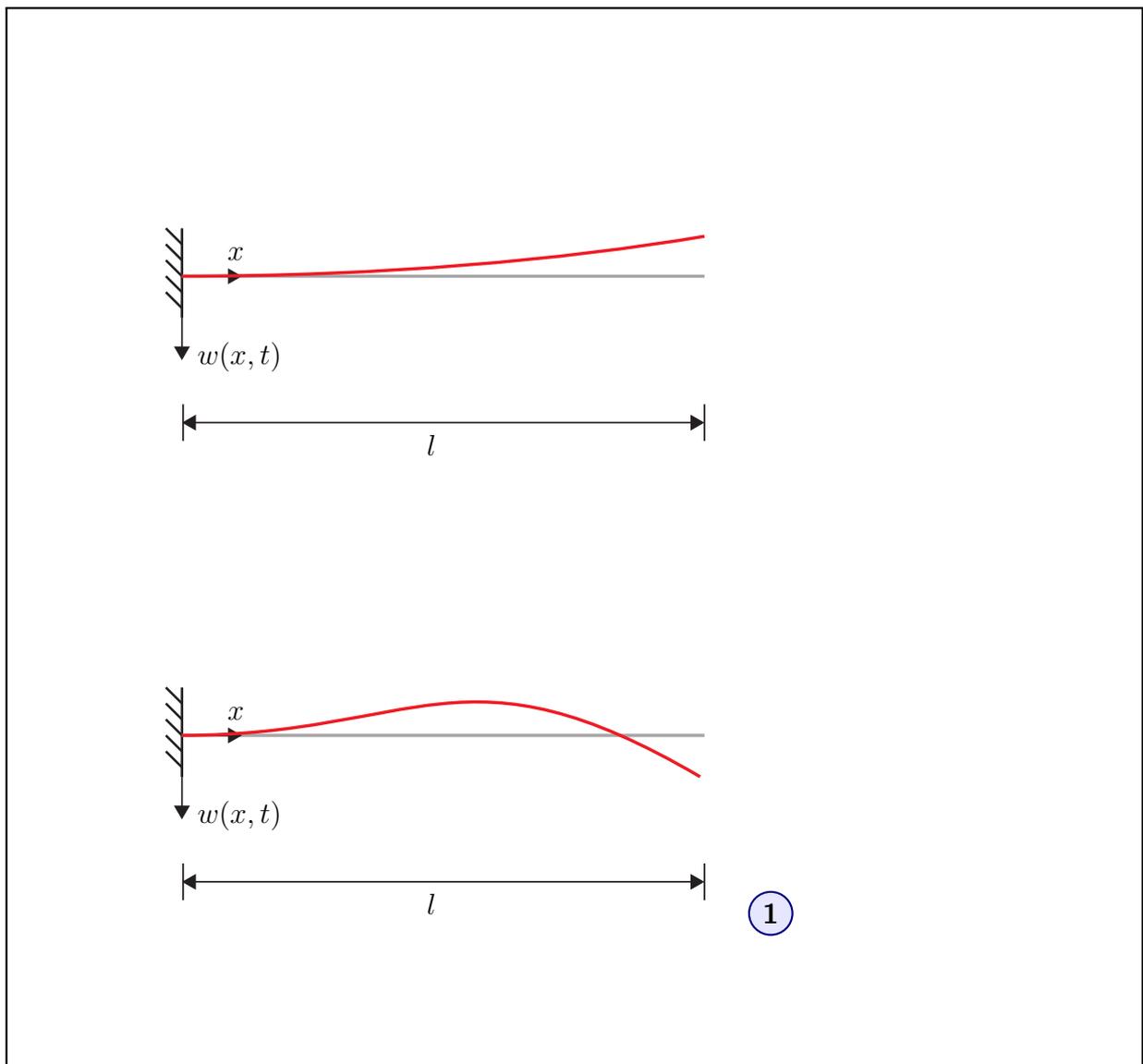
$$\rho A \ddot{w}(x, t) + EI w^{(4)} = q(x, t) = 0 \quad \textcircled{1}$$

Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} w(0, t) = 0 \\ w'(0, t) = 0 \\ w''(l, t) = 0 \end{array} \right\} \quad \textcircled{1}$$

$$EI w'''(l, t) = m \ddot{w}(l, t) + c w(l, t) \quad \textcircled{1}$$

b) Skizzieren Sie die zwei Schwingungsformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen.



1

c) Welche der folgenden Ansatzfunktionen ist für die Bestimmung der niedrigsten Eigenkreisfrequenz mithilfe des Rayleigh-Quotienten geeignet?

$W(x) = x$

$W(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{l^2}$  2

$W(x) = A \cos\left(\pi \frac{x}{l}\right)$

$W(x) = A \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$

- d) Bestimmen Sie mit der Funktion  $W(x) = 5\frac{x^2}{l}$  mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  für den Spezialfall  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

Nebenrechnung:

$$\omega_1^2 \leq \frac{\int_0^l EI W''^2(x) dx}{\int_0^l \rho A W^2(x) dx}$$

$$\left. \begin{aligned} W''(x) &= 10\frac{1}{l} \\ W''^2(x) &= 100\frac{1}{l^2} \\ W^2(x) &= 25\frac{x^4}{l^2} \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l EI W''^2(x) dx &= 100\frac{1}{l} EI \\ \int_0^l \rho A W^2(x) dx &= 5l^3 \rho A \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

$$\omega_1^2 \leq 20\frac{1}{l^4} \frac{EI}{\rho A} \textcircled{1}$$

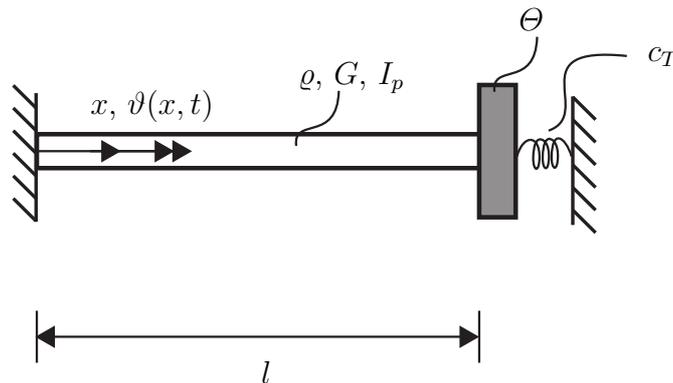
$$\omega_1 \leq \sqrt{20} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \textcircled{1}$$

## Aufgabe 3

[ 10 Punkte ]

An einem Torsionsstab (Dichte  $\varrho$ , Schubmodul  $G$ , polares Flächenträgheitsmoment  $I_p$ ) ist eine starre Scheibe (Massenträgheitsmoment bzgl.  $x$ -Achse  $\Theta$ ) angebracht. Die Scheibe ist über eine für  $\vartheta(l, t) = 0$  entspannte Torsionsfeder (Drehfedersteifigkeit  $c_T$ ) mit der Umgebung verbunden. Mit dem Prinzip von Hamilton ist das Randwertproblem für die Torsionsschwingung  $\vartheta(x, t)$  zu formulieren.

Gegeben:  $\varrho, G, I_p, l, \Theta, c_T$



- a) Geben Sie die kinetische Energie  $T$ , die potentielle Energie  $U$  und die virtuelle Arbeit  $\delta W$  der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}^2 dx + \frac{1}{2} \Theta \dot{\vartheta}^2(l) \quad \textcircled{1}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \vartheta'^2 dx + \frac{1}{2} c_T \vartheta^2(l) \quad \textcircled{1}$$

$$\delta W = 0 \quad \textcircled{1}$$

- b) Geben Sie die geometrische(n) Randbedingung(en) für  $\vartheta(x, t)$  an.

$$\vartheta(0, t) = 0 \quad \textcircled{1}$$

- c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung für  $\vartheta(x, t)$  sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnungen:

Hamilton:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0$$

Variation

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p \dot{\vartheta}^2 dx + \frac{1}{2} \Theta \dot{\vartheta}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \vartheta'^2 dx - \frac{1}{2} c_T \vartheta^2(l) \right] dt \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho I_p \dot{\vartheta} \delta \dot{\vartheta} dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \Theta \dot{\vartheta}(l) \delta \dot{\vartheta}(l) dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta' \delta \vartheta' dx dt - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) dt = 0 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

partielle Integration

$$\begin{aligned} & \int_0^l \rho I_p \dot{\vartheta} \delta \vartheta \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta dx dt + \Theta \dot{\vartheta}(l) \delta \vartheta(l) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \Theta \ddot{\vartheta}(l) \delta \vartheta(l) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} G I_p \vartheta' \delta \vartheta \Big|_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta'' \delta \vartheta dx dt - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) dt \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \Theta \ddot{\vartheta}(l) \delta \vartheta(l) dt - \int_{t_0}^{t_1} G I_p \vartheta'(l) \delta \vartheta(l) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} G I_p \vartheta'(0) \delta \vartheta(0) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta'' \delta \vartheta dx dt - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) dt = 0 \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

sortieren

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l [\rho I_p \ddot{\vartheta} - G I_p \vartheta''] \delta \vartheta dx dt - \int_{t_0}^{t_1} [\Theta \ddot{\vartheta}(l) + G I_p \vartheta'(l) + c_T \vartheta(l)] \delta \vartheta(l) dt = 0 \quad \textcircled{2}$$

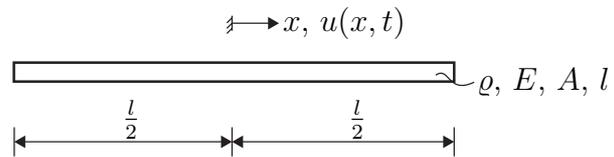
**Hinweis: Bitte das Ergebnis auf der nächsten Seite eintragen.**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Feldgleichung:} \\ \varrho I_p \ddot{\vartheta}(x, t) - GI_p \vartheta''(x, t) = 0 \\ \text{dynamische Randbedingung:} \\ \Theta \ddot{\vartheta}(l) + GI_p \vartheta'(l) + c_T \vartheta(l) = 0 \end{array} \right\} \textcircled{1}$$

## Aufgabe 4

[ 10 Punkte ]

Gegeben ist ein freier Stab (Länge  $l$ , Dichte  $\rho$ , E-Modul  $E$ , Querschnittsfläche  $A$ ), der freie Längsschwingungen  $u(x, t)$  ausführen kann.



Gegeben:  $\rho$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $l$

Hinweis:  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ,  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ .

- a) Geben Sie die Feldgleichung für  $u(x, t)$  und die Randbedingungen für  $x = -\frac{l}{2}$ ,  $x = \frac{l}{2}$  an. Verwenden Sie dabei **ausschließlich das eingezeichnete Koordinatensystem** ( $x = 0$  in der Mitte des Stabes).

Feldgleichung:

$$\rho A \ddot{u}(x, t) - EA u''(x, t) = 0 \quad \textcircled{1}$$

Randbedingungen:

$$u' \left( -\frac{l}{2}, t \right) = 0, \quad u' \left( \frac{l}{2}, t \right) = 0 \quad \textcircled{1}$$

- b) Leiten Sie mit dem Ansatz  $u(x, t) = U(x) \sin(\omega t)$  eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $U(x)$  her und geben Sie deren allgemeine Lösung an.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} (-\rho A \omega^2 U(x) - EA U''(x)) \sin(\omega t) &= 0 \\ \Rightarrow U''(x) + \underbrace{\frac{\omega^2 \rho A}{EA}}_{= \frac{\omega^2}{c^2}} U(x) &= 0 \end{aligned}$$

Differentialgleichung:

$$U''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} U(x) = 0 \quad \textcircled{1}$$

allgemeine Lösung:

$$U(x) = A \cos \left( \frac{\omega}{c} x \right) + B \sin \left( \frac{\omega}{c} x \right) \quad \textcircled{1}$$

c) Bestimmen Sie die Eigenformen  $U_k(x)$  und die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_k$ .

Nebenrechnung:

$$U'(x) = -A \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

Anpassen an Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} U'\left(\frac{l}{2}\right) &= -A \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) + B \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow -A \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) + B \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \\ U'\left(-\frac{l}{2}\right) &= -A \frac{\omega}{c} \sin\left(-\frac{\omega l}{c 2}\right) + B \frac{\omega}{c} \cos\left(-\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \\ &\stackrel{\text{Hinweis}}{=} A \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) + B \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow A \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) + B \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

für nicht-triviale Lösungen sind zwei Fälle möglich:  $\textcircled{1}$

i)  $A = 0, B \neq 0$  :

$$\begin{aligned} B \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 &\Rightarrow \cos\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\omega l}{c 2} = \frac{(2k-1)\pi}{l} &\Rightarrow \omega_k = \frac{(2k-1)\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \textcircled{1}$$

ii)  $A \neq 0, B = 0$  :

$$A \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\omega l}{c 2}\right) = 0 \Rightarrow \omega_k = \frac{2k\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \textcircled{1}$$

Eigenformen:

$$\hat{U}_k(x) = B_k \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right) \text{ und } \tilde{U}_k(x) = A_k \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right) \textcircled{1}$$

Eigenkreisfrequenzen:

$$\hat{\omega}_k = \frac{(2k-1)\pi c}{l} \text{ und } \tilde{\omega}_k = \frac{2k\pi c}{l} \textcircled{1}$$