

Lösungsvorschlag zur Klausur vom 04.08.2015

# Lösungsvorschlag

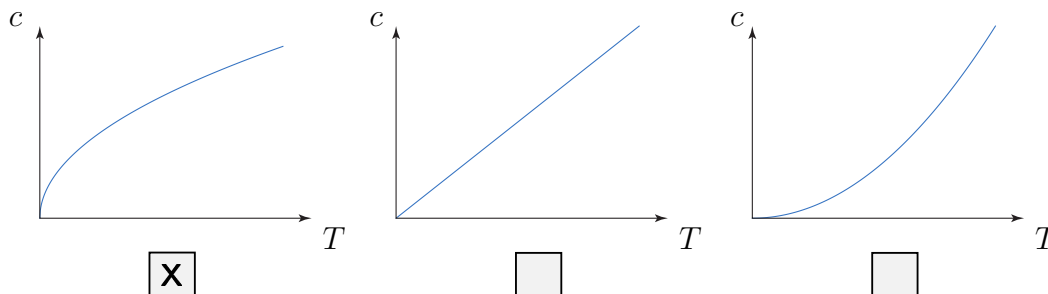
# Theorieaufgaben

[ 10 Punkte ]

## Aufgabe T1

[ 1 Punkt ]

Wie ist der qualitative Zusammenhang zwischen der Vorspannkraft  $T$  und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei einer Saite mit konstanter Masse pro Länge  $\mu$ ? Kreuzen Sie den richtigen Verlauf an.

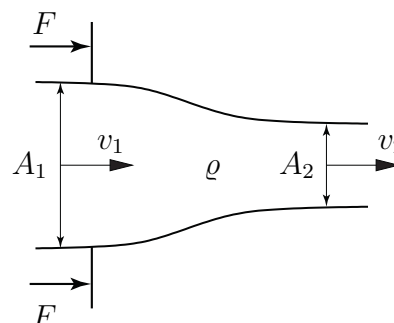


## Aufgabe T2

[ 1 Punkt ]

Eine ideale Flüssigkeit strömt wie skizziert durch ein Rohr mit variablem Querschnitt. Kreuzen Sie die richtige Aussage für die Kraft  $F$  an, die das System im Gleichgewicht hält.

- $F = 0$        $F > 0$        $F < 0$

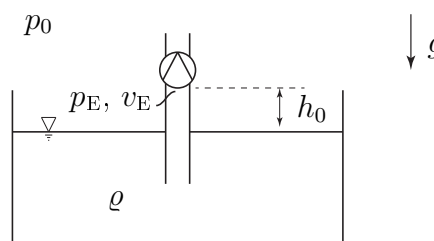


## Aufgabe T3

[ 1 Punkt ]

Eine Pumpe soll benutzt werden, um eine ideale Flüssigkeit wie abgebildet aus dem offenen Reservoir gegen die Schwerkraft zu fördern. In welcher Höhe  $h_0$  muss die Pumpe angebracht werden, wenn der Druck am Einlauf der Pumpe  $p_E$  und die Fließgeschwindigkeit  $v_E$  betragen soll und der Umgebungsdruck einheitlich  $p_0$  beträgt?

Gegeben:  $p_E, v_E, h_0, p_0, g, \rho$



Nebenrechnung:

$$p_0 = p_E + \frac{1}{2} \rho v_E^2 + \rho g h_0$$

$$h_0 = \frac{p_0 - p_E - \frac{1}{2} \rho v_E^2}{\rho g}$$

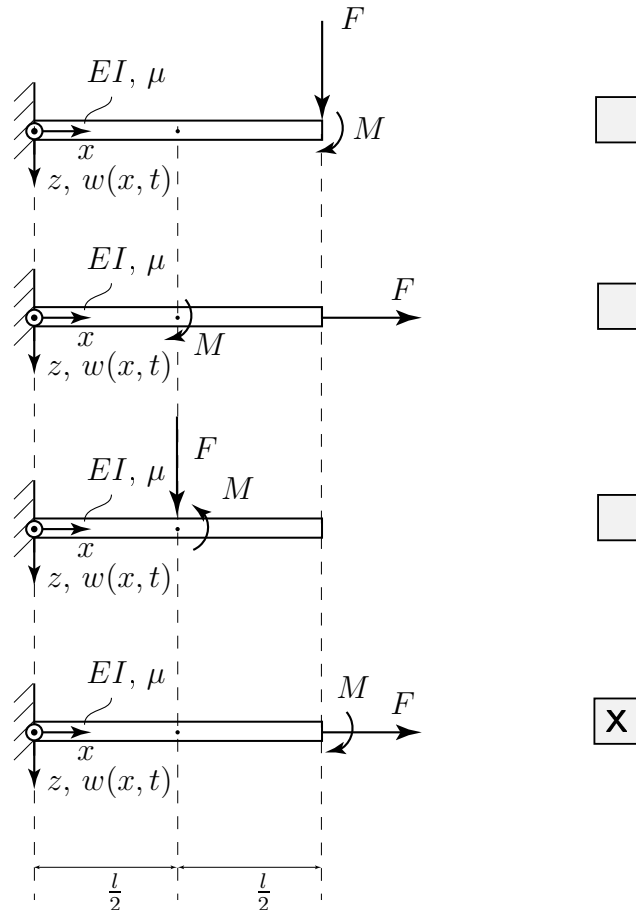
**Aufgabe T4**

[ 1 Punkt ]

Für ein mechanisches System liefert das Prinzip von Hamilton folgenden Ausdruck:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^l (\mu \dot{w}^2 - EI w''^2 - F w'^2) dx dt + \int_{t_0}^{t_1} M \delta w'(l, t) dt = 0.$$

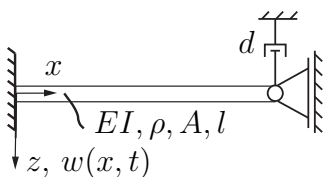
Für welche(s) der nachfolgend skizzierten Systeme ergibt sich dieser Ausdruck im Prinzip von Hamilton? Kreuzen Sie an.



**Aufgabe T5**

[ 2 Punkte ]

Geben Sie alle geometrischen und dynamischen Randbedingungen für den skizzierten Euler-Bernoulli-Balken an.

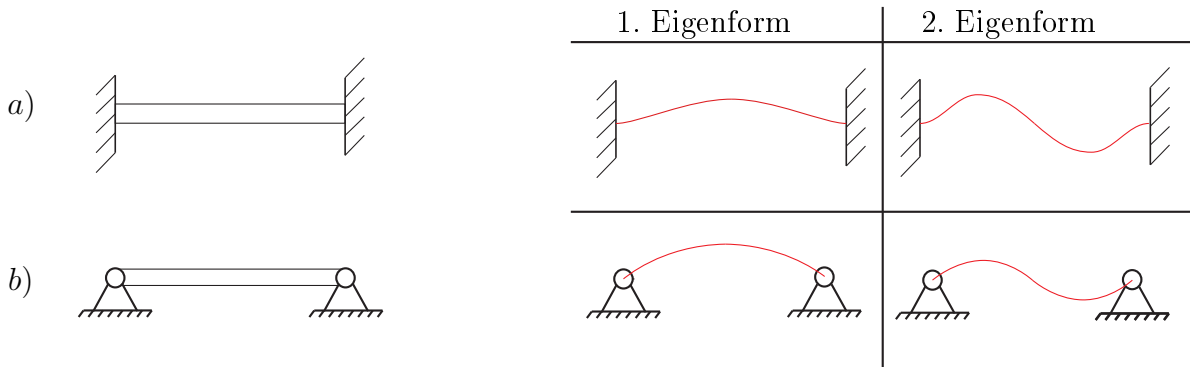


$$\begin{aligned}
 w(0, t) &= 0 & w'(0, t) &= 0 \\
 w''(l, t) &= 0 & w'''(l, t) &= \frac{d \dot{w}(l, t)}{EI}
 \end{aligned}$$

**Aufgabe T6**

[ 2 Punkte ]

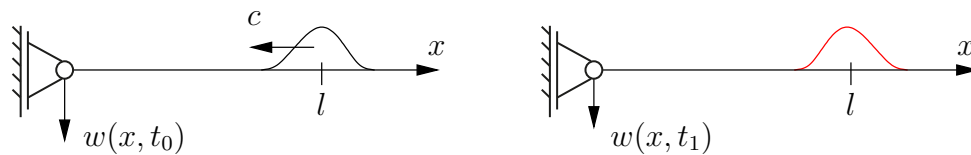
Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und die zweite Eigenform.



**Aufgabe T7**

[ 1 Punkt ]

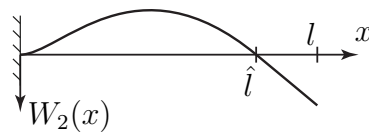
Eine Transversalwelle läuft in einer Saite mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  auf die Lagerung bei  $x = 0$  zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit  $t_0 = 0$  bei  $x = l$ . Skizzieren Sie im rechten Diagramm die Verschiebung  $w(x, t_1)$  zur Zeit  $t_1 = \frac{2l}{c}$ .



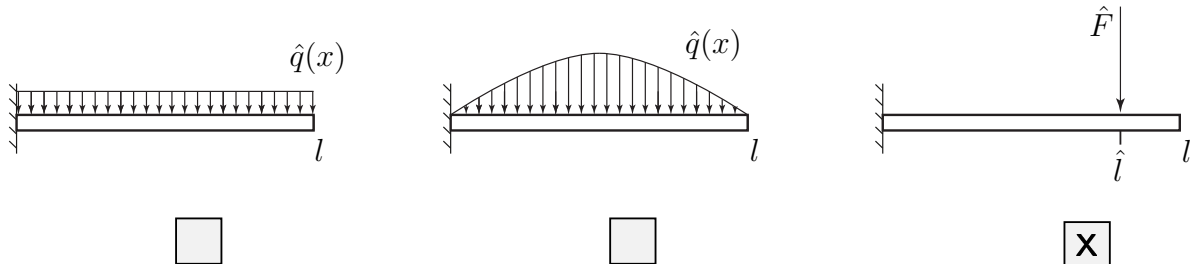
**Aufgabe T8**

[ 1 Punkt ]

Ein einseitig fest eingespannter Euler Bernoulli-Balken besitzt die abgebildete 2. Eigenform  $W_2(x)$  bei der zweiten Eigenkreisfrequenz  $\omega_2$  und wird mit einer Streckenlast  $q(x, t) = \hat{q}(x) \cos(\omega_2 t)$  bzw. mit einer Einzellast  $F(t) = \hat{F} \cos(\omega_2 t)$  zu Schwingungen angeregt.



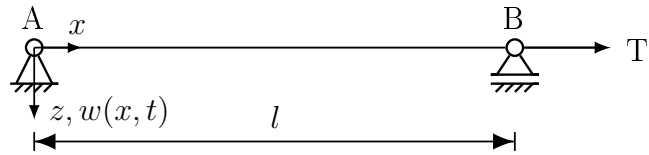
Kreuzen Sie die Belastung(en) an, die dabei **nicht** zu Resonanz führt/führen.



# Aufgabe 1

[ 10 Punkte ]

Die skizzierte Saite (Länge  $l$ , Masse pro Länge  $\mu$ ) wird durch die Kraft  $T$  vorgespannt.



Gegeben:  $T, l, \mu$

- a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an. Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ?

Ergebnisse:

Feldgleichung:  $\ddot{w}(x, t) - c^2 w''(x, t) = 0$  **1**

Randbedingungen:  $w(0, t) = w(l, t) = 0$  **1**

Wellenausbreitungsgeschwindigkeit:  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  **1**

- b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen.

Nebenrechnung:

Ansatz:  $w(x, t) = W(x)p(t)$

Lösung:  $W(x) = A \cos(\frac{\omega}{c}x) + B \sin(\frac{\omega}{c}x)$

Anpassen an Randbedingungen:

$W(0) = A = 0 \rightarrow A = 0$  **1**

$W(l) = B \sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \rightarrow \sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \rightarrow \frac{\omega_k}{c}l = k\pi, k = 1, 2, \dots$  **1**

Eigenkreisfrequenzen:

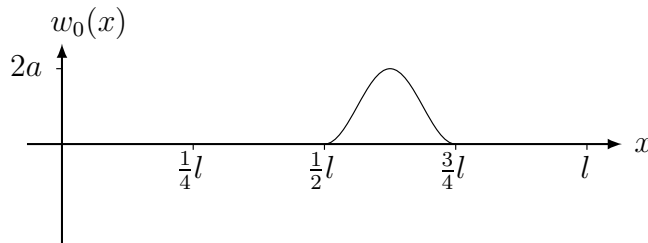
$\omega_k = \frac{k\pi c}{l}, k = 1, 2, \dots$

c) Es seien nun die folgenden Anfangsbedingungen für  $t = 0$  gegeben:

$$w(x, 0) = w_0(x) = \begin{cases} -a \cos \left[ 8\pi \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + a & \text{für } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{4}l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

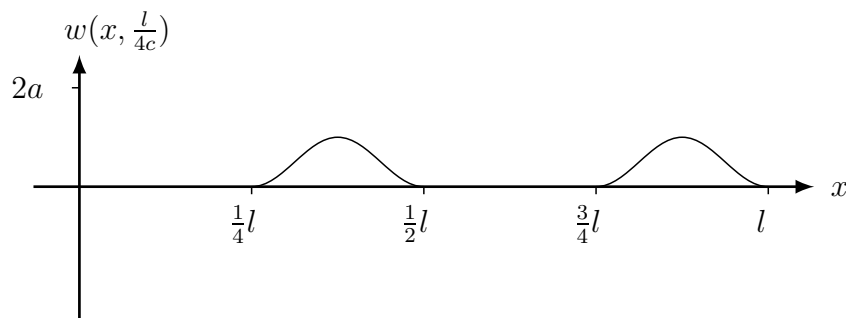
$$\dot{w}(x, 0) = v_0(x) = 0$$

Skizze für  $w_0(x)$  :

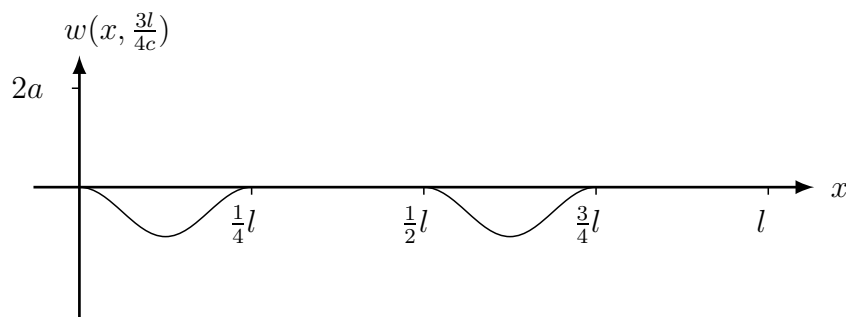


Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  wird nun als bekannt vorausgesetzt. Skizzieren Sie die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt  $t = l/4c$  und zum Zeitpunkt  $t = 3l/4c$ .

Skizzen:



1



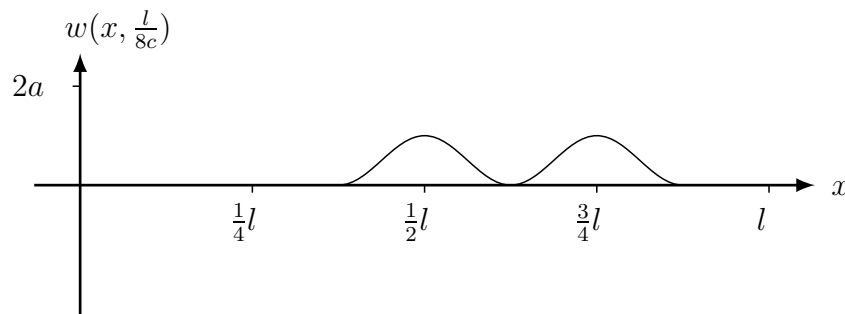
1

d) Für kleine Zeiten  $t$  kann die Verschiebung  $w(x, t)$  mit der Formel

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \left[ w_0(x - ct) + w_0(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi \right]$$

berechnet werden. Bis zu welcher Zeit  $t^*$  ist diese Lösung gültig? Geben Sie  $w(x, l/8c)$  an.

Nebenrechnung:



$$t^* = \frac{l}{4c} \quad \textcircled{1}$$

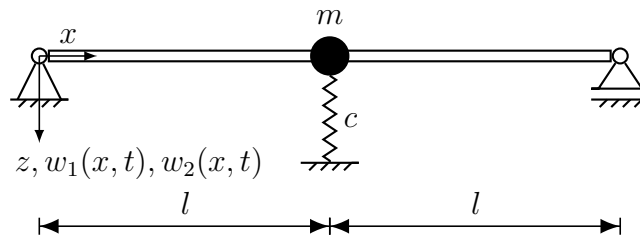
$$w(x, l/8c) = \begin{cases} -\frac{1}{2}a \cos \left[ 8\pi \left( \frac{x+l/8}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2}a, & \text{falls } \frac{3}{8}l \leq x \leq \frac{5}{8}l \\ -\frac{1}{2}a \cos \left[ 8\pi \left( \frac{x-l/8}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2}a, & \text{falls } \frac{5}{8}l \leq x \leq \frac{7}{8}l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

## Aufgabe 2

[ 11 Punkte ]

Die Durchbiegung des skizzierten Balkens (Länge  $2l$ , Masse pro Länge  $\mu$ , Biegesteifigkeit  $EI$ ) wird im Bereich  $0 \leq x \leq l$  durch  $w_1(x, t)$  und im Bereich  $l \leq x \leq 2l$  durch  $w_2(x, t)$  beschrieben. Der Balken wird an der Stelle  $x = l$  durch eine Feder (Federsteifigkeit  $c$ , entspannt für  $w_1(l, t) = w_2(l, t) = 0$ ) gestützt und trägt an dieser Stelle eine Punktmasse  $m$ .

Gegeben:  $EI, l, \mu, m, c$



- a) Skizzieren Sie die zwei Schwingformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen (ohne Rechnung).

Skizzen:

- b) Geben Sie die Feldgleichungen für  $w_1(x, t)$  im Bereich  $0 \leq x \leq l$  und  $w_2(x, t)$  im Bereich  $l \leq x \leq 2l$  an.

Feldgleichungen:

$$0 \leq x \leq l : \ddot{w}_1(x, t) + \frac{EI}{\mu} w_1''''(x, t) = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$l \leq x \leq 2l : \ddot{w}_2(x, t) + \frac{EI}{\mu} w_2''''(x, t) = 0 \quad \textcircled{1}$$



- c) Geben Sie die Randbedingungen sowie für die Stelle  $x = l$  die Übergangsbedingungen an.

Nebenrechnung:

Rand und Übergangsbedingungen:

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w_1(0, t) &= 0 \\ w_1'(0, t) &= 0 \quad \textcircled{1} \\ w_2(2l, t) &= 0 \\ w_2''(2l, t) &= 0 \end{aligned}$$

Übergangsbedingungen:

$$\begin{aligned} w_1(l, t) &= w_2(l, t) \\ w_1'(l, t) &= w_2'(l, t) \quad \textcircled{1} \\ w_1''(l, t) &= w_2''(l, t) \\ m\ddot{w}_1(l, t) + cw_1(l, t) + EI(w_2'''(l, t) - w_1'''(l, t)) &= 0 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

- d) Bestimmen Sie mit der Ansatzfunktion  $W(x) = x(2l-x)$  mit Hilfe des Rayleigh-Quotientens eine obere Schranke für die niedrigste Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  für den Sonderfall  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

Nebenrechnung:

$$\int_0^{2l} EI(W''(x))^2 dx = 4EI \int_0^{2l} dx = 8lEI \quad \textcircled{1}$$

$$\int_0^{2l} \mu W^2(x) dx = \mu \int_0^{2l} (4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4) dx = \mu l^5 \left( \frac{32}{3} - \frac{64}{4} + \frac{32}{5} \right) = \frac{16}{15} \mu l^5 \quad \textcircled{1}$$

Ergebnis:

$$\omega_1^2 \leq \frac{15EI}{2\mu l^4} \longrightarrow \omega_1 \leq \sqrt{\frac{15}{2}} \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \quad \textcircled{1}$$

e) Die jeweils niedrigste Eigenkreisfrequenz wird für die Fälle

- $m = 0$  und  $c = 0$  mit  $\hat{\omega}_1$
- $m > 0$  und  $c = 0$  mit  $\bar{\omega}_1$
- $m = 0$  und  $c > 0$  mit  $\tilde{\omega}_1$

bezeichnet. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

Nebenrechnung:

$$\hat{\omega}_1 < \bar{\omega}_1 \quad \square$$

$$\hat{\omega}_1 = \bar{\omega}_1 \quad \square$$

$$\hat{\omega}_1 > \bar{\omega}_1 \quad \mathbf{X}$$

1

$$\hat{\omega}_1 < \tilde{\omega}_1 \quad \mathbf{X}$$

$$\hat{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1 \quad \square$$

$$\hat{\omega}_1 > \tilde{\omega}_1 \quad \square$$

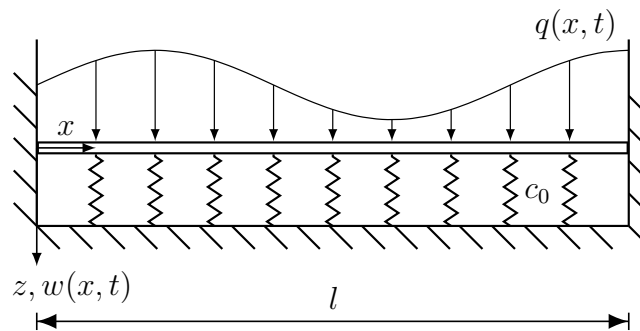
1

## Aufgabe 3

[ 11 Punkte ]

Gegeben ist der skizzierte beidseitig fest eingespannte schlanke Euler-Bernoulli Balken (Länge  $l$ , Masse pro Länge  $\mu$ , Biegesteifigkeit  $EI$ ). Der Balken ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit  $c_0$ ) und wird durch eine Streckenlast  $q(x, t)$  belastet. Mit dem Prinzip von Hamilton sind die Feldgleichung sowie die Randbedingungen zu bestimmen.

Gegeben:  $l, \mu, EI, c_0, q(x, t)$



- a) Geben Sie die kinetische Energie  $T$ , die potentielle Energie  $U$  sowie die virtuelle Arbeit  $\delta W$  der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x, t) \, dx \quad \textcircled{1}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (EI w''^2(x, t) + c_0 w^2(x, t)) \, dx \quad \textcircled{1}$$

$$\delta W = \int_0^l q(x, t) \delta w(x, t) \, dx \quad \textcircled{1}$$

- b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0 \\ w'(0, t) &= 0 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(l, t) &= 0 \\ w'(l, t) &= 0 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung und -falls existierend- die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnung:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x, t) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^l (EI w''^2(x, t) + c_0 w^2(x, t)) \, dx + \int_0^l q(x, t) \delta w(x, t) \, dx \right] dt \quad \textcircled{1}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \mu \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) \, dx \, dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''(x, t) \delta w''(x, t) \, dx \, dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c_0 w(x, t) \delta w(x, t) \, dx \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l q(x, t) \delta w(x, t) \, dx \, dt \quad \textcircled{1}$$

$$= \underbrace{\int_0^l [\mu \dot{w}(x, t) \delta w(x, t)]_{t_0}^{t_1} \, dx}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \mu \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) \, dx \, dt \quad \textcircled{1}$$

$$- \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} [EI w''(x, t) \delta w'(x, t)]_0^l \, dt + \int_{t_0}^{t_1} [EI w'''(x, t) \delta w(x, t)]_0^l \, dt}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''''(x, t) \delta w(x, t) \, dx \, dt \quad \textcircled{2}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l c_0 w(x, t) \delta w(x, t) \, dx \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l q(x, t) \delta w(x, t) \, dx \, dt$$

Ergebnisse:

$$\text{Feldgleichung: } \mu \ddot{w}(x, t) + EI w'''' w(x, t) + c_0 w(x, t) = q(x, t) \quad \textcircled{1}$$

**Aufgabe 4**

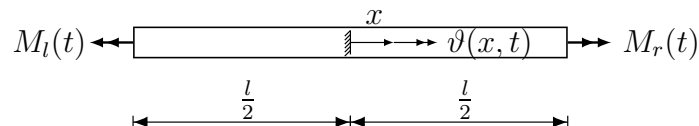
[ 8 Punkte ]

Gegeben ist der skizzierte freie Torsionsstab (Länge  $l$ , Dichte  $\rho$ , Schubmodul  $G$ , Polares Flächenträgheitsmoment  $I_p$ ), der an seinem linken Ende durch das Moment  $M_l(t)$  und an seinem rechten Ende durch das Moment  $M_r(t)$  belastet wird.

Hinweis:  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$  und  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ .

Benutzen Sie das vorgegebene Koordinatensystem.

Gegeben:  $l, \rho, G, I_p, M_l(t), M_r(t)$



- a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen für die Torsionsschwingung  $\vartheta(x, t)$  an.

Nebenrechnung:

Ergebnisse:

Feldgleichung:  $\ddot{\vartheta}(x, t) - c^2 \vartheta''(x, t) = 0$  mit  $c^2 = \frac{G}{\rho}$  (1)

Randbedingungen:

$\vartheta'(-\frac{l}{2}, t)GI_p = M_l(t)$  (1)                       $\vartheta'(\frac{l}{2}, t)GI_p = M_r(t)$  (1)

- b) Bestimmen Sie für den Fall der freien Schwingung ( $M_l(t) = M_r(t) = 0$ ) mit dem Ansatz  $\vartheta(x, t) = \theta(x) \sin(\omega t)$  eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\theta(x)$  und geben Sie deren allgemeine Lösung sowie die zugehörigen Randbedingungen an.

Nebenrechnung:

Ansatz in Feldgleichung:  $-\omega^2 \theta(x) \sin(\omega t) - c^2 \theta''(x) \sin(\omega t) = 0$

Differentialgleichung:  $\theta''(x) + (\frac{\omega}{c})^2 \theta(x) = 0$  (1)

Lösung:  $\theta(x) = A \cos(\frac{\omega}{c}x) + B \sin(\frac{\omega}{c}x)$  (1)

Randbedingungen:  $\theta(-\frac{l}{2}) = \theta(\frac{l}{2}) = 0$  (1)

c) Als Lösung des Problems aus b) ergeben sich jeweils für  $k = 1, 2, \dots$  folgende Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{2k-1}$ ,  $\omega_{2k}$  und Eigenformen  $\theta_{2k-1}(x)$ ,  $\theta_{2k}(x)$

$$\omega_{2k-1} = (2k - 1)\tilde{C}, \quad \theta_{2k-1}(x) = \sin\left(\frac{(2k - 1)\pi}{l}x\right),$$

$$\omega_{2k} = 2k\widehat{C}, \quad \theta_{2k}(x) = \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right).$$

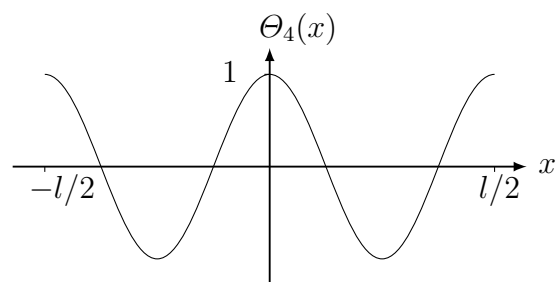
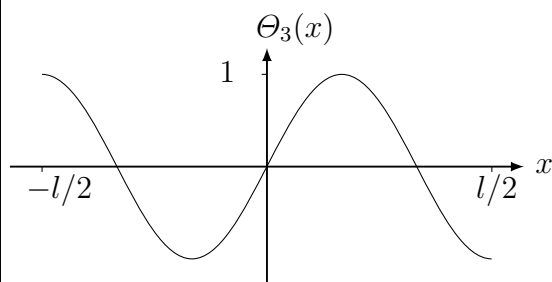
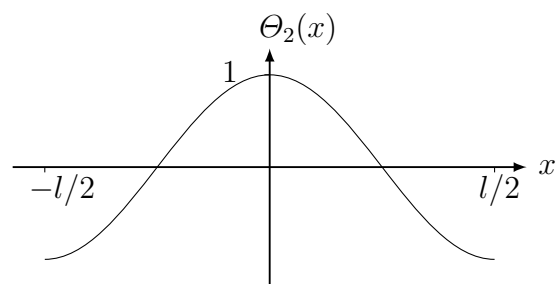
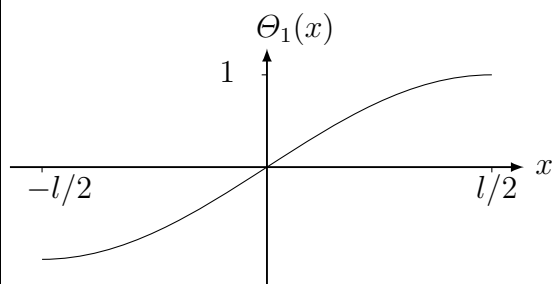
Geben Sie die Erregerkreisfrequenzen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  an, für die es in den folgenden Fällen zu Resonanz kommt:

1.  $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t)$ ,  $M_r(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t)$ ,
2.  $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_2 t)$ ,  $M_r(t) = -M_0 \sin(\Omega_2 t)$ .

Überlegen Sie dazu, welche der Eigenformen durch welche äußeren Momente angeregt werden können.

Nebenrechnung:

Anschaulich durch Interpretation der Eigenformen:



Erregerkreisfrequenzen  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ :

$\Omega_1 = \omega_{2k-1}$  **1**

$\Omega_2 = \omega_{2k}$  **1**