Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut f. Mathematik **WS 02/03**
Doz.: Bollhöfer, Scherfner, Scheutzow , Unterreiter , Wiehe
Ass.: Bollhöfer, Dimitroff , Méndez, Schulz–Baldes

.02.2003

Lösungen zur halben Probeklausur (Rechenteil) „Lineare Algebra für Ingenieure“

Lösung Aufgabe 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 16 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 50 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 50 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_4 = \lambda, x_3 = -25/2, x_2 = 10, x_1 = 21$$

Lösung für den Kern:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \lambda, x_4 = 0$$

Lösung Aufgabe 2:

- Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$
- Die entsprechende Eigenvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 3: Offenbar ist (Auflösen nach x_3):

$$x_3 = -2tx_1 - (3-t)x_2 + t.$$

Setze $\lambda = x_1$, $\mu = x_2$, so erhalten wir

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-3 \end{pmatrix}$$

Für einen Untervektorraum muss $\vec{x} = 0$ enthalten sein. Das geht nur für $t = 0$, da dann und nur dann die rechte Seite des Skalarproduktes verschwindet. Eine Basis ist dann gegeben durch die beiden Richtungsvektoren, die nach Konstruktion die Ebene aufspannen, also durch

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Dimension einer Ebene als Vektorraum ist — natürlich auch hier — immer gleich zwei.
Lösung Aufgabe 4: Offenbar ist mit $\vec{x} := (0,1)^T$

$$(0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

so dass diese quadratische Form sicherlich kein Skalarprodukt ist.

Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut f. Mathematik **WS 02/03**
Doz.: Bollhöfer, Scherfner, Scheutzow , Unterreiter , Wiehe
Ass.: Bollhöfer, Dimitroff , Méndez, Schulz–Baldes

.02.2003

Lösungen zur halben Probeklausur (Verständnisteil)
„Lineare Algebra für Ingenieure“

Aufgabe 1

(a) Die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bewirkt das Vertauschen der ersten zwei Komponenten eines beliebigen Vektors $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ und lässt die dritte Komponente unverändert. Die folgende Matrix hat diese Wirkung:

$$M_\phi := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$M_\phi \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} = \phi(\vec{u})$$

(b) Da $\det(M_\phi) = -1 \neq 0$ ist die Abbildung ϕ invertierbar.
Eine nochmalige Ausführung der Abbildung macht die Vertauschung rückgängig. Damit erhalten wir: ${M_\phi}^2 = E_3$ und somit $M_\phi = {M_\phi}^{-1}$.

(c) Nach Voraussetzung ist $M\vec{x} = 2\vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten

$$M\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\vec{x}$$

also die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

stellt eine lineare Abbildung ϕ, die 2 als Eigenwert hat.

Aufgabe 2

(a) A ist nicht invertierbar wenn $\det(A) = 0$. Dies ist der Fall für $\gamma = 0$ und α, β beliebig. Insbesondere z.B. mit

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 0$$

ist A nicht invertierbar und nicht alle drei Parameter haben den gleichen Wert.

(b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Dimension des Kernes ein $(n-r)$-dimensionaler Vektorraum ist. Hier ist $n = 3$. r ist der Rang der entsprechenden Matrix.

1. Mit $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1$ und eine Zeilenvertauschung erhalten wir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   also $r = 3$ und die Dimension des Kernes ist 0.

2. Mit $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0$ und eine Zeilenvertauschung erhalten wir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   also $r = 2$ und die Dimension des Kernes ist 1.

3. Mit $\alpha = -1, \beta = -1, \gamma = 0$ haben wir

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   also $r = 1$ und die Dimension des Kernes ist 2.

Aufgabe 3

Die Wronski-Matrix lautet:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ e^x & e^x + e^x + xe^x & 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x \end{pmatrix}$$

Für $x = 0$ erhalten wir:

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir haben $\det(W(0)) = 2$. Es gibt somit einen Wert für x mit $\det(W(x)) \neq 0$ und infolgedessen sind e^x, xe^x, x^2e^x linear unabhängig.