Technische Universität Berlin **WS 02/03**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Bollhöfer, Scherfner, Scheutzow, Unterreiter, Wiehe
Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Klausur am 20.2.2002 - Rechenteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/

---

1. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (2 Punkte) Das Polynom ist $P(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 + (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$.
(ii) (2 Punkte) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$.
(iii) (3 Punkte) Die Eigenvektoren sind $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

(iv) (3 Punkte) Zu lösen ist die Gleichung $(A - 1\,E)\vec{w} = \vec{v}$, wobei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der eben bestimmte Eigenvektor ist. Eine Lösung ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es gilt offensichtlich $\vec{w} \neq \vec{v}$.

2. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (3 Punkte)

$$\det\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; 2a - 2 - a + a \;=\; 2(a-1)\ .$$

(i) (3 Punkte) Für $a = 1$ ist die Determinante gleich 0 und die Vektoren daher linear abhängig.
(i) (4 Punkte) Gelöst werden muss also

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{0}$$

Eine Lösung ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so dass $\vec{v}_3 = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

3. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (2 Punkte) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.
(ii) (4 Punkte)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-1/2} \\ 0 & 2^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $C^{-1}BC = D$ rechnet man dann sofort nach.
(iii) (4 Punkte) Nach der Vorlesung und den Übungen gilt:

$$\vec{y}(t) = C \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} C^{-1}\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (3 Punkte) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Eine Lösungsbasis ist also gegeben durch e^x, xe^x.
(ii) (2 Punkte) Eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = 1$.
(iii) (2 Punkte) Die allgemeine Lösung ist also $y(x) = 1 + ae^x + bxe^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
(iii) (3 Punkte) $y'(0) = a + b = 0$ und $y(0) = 1 + a$ zeigen, dass $y(x) = 1 + xe^x$ das Anfangswertproblem löst.