# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** WS 02/03
**Bollhöfer, Scherfner, Scheutzow, Unterreiter, Wiehe** 19.02.2003

## Februar – Klausur (Verständnisteil)
## Lineare Algebra für Ingenieure

Name: ............................ Vorname: ............................

Matr.–Nr.: ........................ Studiengang: ........................

---

Neben einem handbeschriebenen Din-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem separaten Din-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## 1. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

*(i)* Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

*(ii)* Geben Sie den Rang von $A$ an.

*(iii)* Geben Sie den Kern von $A$ an.

*(iv)* Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

*(v)* Sind die Eigenwerte von $A$ reell?

*(vi)* Gibt es eine Basis von orthogonalen Eigenvektoren von $A$?

## 2. Aufgabe

10 Punkte

Sei $\langle\, . \,, \, . \,\rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, d.h. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w}$, und sei $\| \, . \, \|$ die induzierte Norm.

Ferner seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie folgendes:

*(i)* $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$.

*(ii)* $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.

## 3. Aufgabe

8 Punkte

Welche der folgenden Mengen von Funktionen können eine Lösungsbasis einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten bilden? (keine Begründung notwendig; je richtiger Antwort 2 Punkte.)

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| $x^2$, $e^x$, $e^{-2x}$ | ○ | ○ |
| $e^x$, $\cos(x)$, $\sin(x)$ | ○ | ○ |

Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ sind Unterräume? (Je richtiger Antwort 2 Punkte.)

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x+y-z=1 \right\}$ | ○ | ○ |
| $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x=y \text{ und } x=2z \right\}$ | ○ | ○ |

## 4. Aufgabe

10 Punkte

Seien

$$f_1(x) \;=\; x \;, \qquad f_2(x) \;=\; x^2 \;, \qquad f_3(x) \;=\; e^x - 1 \;.$$

*(i)* Bilden Sie die zugehörige Wronski Matrix $W(x)$.

*(ii)* Werten Sie die Wronski Matrix an geeigneter Stelle $x$ aus und überprüfen Sie mit einer kurzen Rechnung, ob die Funktionen $f_1$, $f_2$ und $f_3$ linear unabhängig sind.

*(iii)* Ist die Funktion $f_4(x) = 1$ Linearkombination von $f_1$, $f_2$ und $f_3$?