Aufgabe 1 12 Punkte

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 11 \end{pmatrix} .$$

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:
$Ax = b_1$, $\quad Ay = b_2$, $\quad Az = b_3$,
wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} , \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2 8 Punkte

Gegeben sei folgende Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - y - z \\ x + 3y + z \\ 3x - y - 2z \end{pmatrix} .$$

(a) Finden Sie eine Matrix A_φ, so dass $\varphi(\vec{x}) = A_\varphi \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Folgt aus Teil (a), dass die Abbildung φ linear ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie den Kern von A_φ.

(d) Bestimmen Sie die Dimension von dem Kern von A_φ. Ist A_φ invertierbar?

Aufgabe 3 8 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen sie die Eigenwerte von A und die zugehörige Eigenvektoren.

(b) Gibt es Hauptvektoren von A, die keine Eigenvektoren sind?

(c) Geben Sie alle Hauptvektoren an.

Aufgabe 4 12 Punkte

Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = x^2$$

(a) Bestimmen sie ein Fundamentalsystem von Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

(c) Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung an.

(d) Bestimmen Sie den Ansatz nach dem Typ der rechten Seite für eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = x - 8e^x \ .$$

(Nur den Ansatz angeben, nicht durchrechnen!)