Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 03

Seiler, Faermann, Hömberg 23. Juli 2003

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang 40% Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

12 Punkte

Sei die Matrix A gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus die Lösungsmenge des zugehörigen *homogenen* Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \vec{0} , \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 .$$

(ii) Ist der Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des *inhomogenen* Gleichungsystems in (**??**) ?

(iii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des *inhomogenen* Gleichungssystems (**??**).

(iv) Geben Sie den Rang von A an.

(v) Geben Sie den Wert der Determinante von A an.

2. Aufgabe

8 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(i) Zeigen Sie, dass $\{B_1, B_2, B_3\}$ ein System von linear unabhängigen Vektoren im Vektorraum der reellwertigen 2×2 Matrizen bildet.

(ii) Was ist die Dimension des von B_1, B_2 und B_3 aufgespannten Vektorraumes?

(iii) Stellen Sie, sofern möglich, die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination von B_1, B_2 und B_3 dar.

3. Aufgabe

8 Punkte

Betrachten Sie den euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Orthonormalisieren Sie mit dem Schmidt'schen Verfahren die folgenden drei Vektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} , \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} , \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe

12 Punkte

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B.

(ii) Diagonalisieren Sie B, das heißt, bestimmen Sie eine 2×2-Matrix S, so dass SBS^{-1} diagonal ist.

(iii) Für $t \in \mathbb{R}$, berechnen Sie $\exp(tB)$.

(iv) Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = B\,\vec{x}(t) , \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$