A

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Eppler, Richter, Scherfner, Seiler, Zorn

WS 03/04
25. Februar 2004

Februar – Klausur (Rechenteil)
Lösungen: Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus die Inverse von A und überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Rechnung explizit.

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{2.Z:1.-2.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow{3.Z:1.-3.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow{1.Z:1.-2.-3.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow{3.Z:-1\cdot 3.} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Daraus liest man auf der rechten Seite die Inverse ab:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir machen die Probe:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Es muss vorher nicht (etwa mit Hilfe der Determinante) geprüft werden, ob A invertierbar ist, da man dann mit Hilfe des Gaußalgorithmus nicht links die Einheitsmatrix hätte erzeugen können.

(ii) Lösen Sie mit Hilfe der in (i) berechneten Inversen die Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Da wir nun wissen, dass A invertierbar ist, können wir die *eindeutige* Lösung des gegebenen Gleichungssystems berechnen:

$$\vec{x} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Sei der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt gegeben, d.h. für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ist das Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4$. Und seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

Lösung:
Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0} \tag{1}$$

nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt. Die Gleichung (1) ist äquivalent zu folgendem linearen Gleichungssystem, in dem als Spalten der Matrix die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ stehen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem, indem wir den Gaußalgorithmus auf A anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{3.Z:3.-1.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{1.Z:1.-2.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{2.Z:2.-4.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{vertauschen}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Zeilenstufenform lesen wir für das lineare Gleichungssysstems (2) als *eindeutige* Lösung ab: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Damit ist gezeigt, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aufgespannten Teilraumes von $\mathbb{R}^4$.

Lösung:
Da wir in (i) die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ gezeigt haben, können wir den Algorithmus aus dem Skript direkt anwenden. (Im folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ die aus dem Standardskalarprodukt induzierte Norm.) Wir erhalten:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1}{\|\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1\|}$$

Wir berechnen den Zähler:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieser Vektor hat die Norm $\sqrt{2}$, so dass wir als nächsten Vektor der gesuchten Orthonormalbasis erhalten:

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \frac{\vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle \vec{w}_2}{\| \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle \vec{w}_2 \|}$$

Wir berechnen den Zähler:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle \vec{w}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dieser Vektor hat die Norm $\sqrt{2}$. Wir erhalten daher schließlich:

$$\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Lösung:
Für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) \\
&= \det \begin{pmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 3 & -3 & (-1-\lambda) \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda) \\
(&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 \quad)
\end{aligned}$$

Da die Eigenwerte von A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind, lesen wir für sie aus der vorletzen Gleichung ab:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2 \quad \text{(algebraische Vielfachheit: 2)} \\
\lambda_2 &= -1 \quad \text{(algebraische Vielfachheit: 1)}
\end{aligned}$$

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

Lösung:
Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ ist der Kern von $A - \lambda E_3$. Wir lösen also das entsprechende homogene lineare Gleichungssystem.

$\lambda = 2$:
Wir müssen $(A - 2E_3)\vec{x} = \vec{0}$ lösen.

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Hieraus lesen wir sofort für den Eigenraum ab:

$$\text{Eigenraum}(A, 2) = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Dieser Eigenraum hat Dimension 2 (geometrische Vielfachheit: 2).

$\lambda = -1$:
Wir müssen $(A - (-1)E_3)\vec{x} = \vec{0}$ lösen. Es gilt:

$$A - (-1)E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Darauf wenden wir den Gaußalgorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{3.-1.+2.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus lesen wir sofort für den Eigenraum ab:

$$\text{Eigenraum}(A, -1) = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Dieser Eigenraum hat Dimension 1 (geometrische Vielfachheit: 1).

(iii) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

Lösung:
In (i) haben wir die Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten bestimmt. In (ii) haben wir die zugehörigen Eigenräume bestimmt und ihre Dimensionen abgelesen. Es stimmen jeweils die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten überein. Außerdem zerfiel das charakteristische Polynom vollständig. Daher bilden die gefundenen Basen der Eigenräume zusammen eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren. (Man kann auch argumentieren, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenvektoren linear unabhängig sind, so dass die oben bei den Eigenräumen angegebenen Eigenvektoren linear unabhängig sind. Damit haben wir eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren.) Daher ist A diagonalisierbar.

(iv) Geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. (Es ist keine lange Rechnung nötig!)

Lösung:
Bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren hat die Matrixdarstellung Diagonalgestalt, wobei auf der Diagonalen die Eigenwerte stehen. Bezüglich der oben gefundenen Basis aus Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lautet die zugehörige Diagonalmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) - x(t) = \sin(t) \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

mit den Anfangswerten

$$x(0) = 0, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

(i) Leiten Sie mit dem Exponentialansatz die charakteristische Gleichung für die zu (3) gehörende **homogene** Differentialgleichung her.

Lösung:
Die zu (3) gehörende homogene Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) - x(t) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

Wir machen den Exponentialansatz für eine Lösung der homogenen DGL:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Nun berechnen wir die Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Nun setzen wir den Ansatz in die homogene DGL (5) ein:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) - x(t) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{6}$$
$$\iff \lambda^2 e^{\lambda t} - e^{\lambda t} = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{7}$$
$$\iff e^{\lambda t}(\lambda^2 - 1) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{8}$$
$$\iff \lambda^2 - 1 = 0 \tag{9}$$

Die letzte Gleichung ist die *charakteristische Gleichung*.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **homogenen** Differentialgleichung.

Lösung:
Aus der in (i) gefundenen charakteristischen Gleichung lesen wir ihre Lösungen ab:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1$$

Da wir zwei reelle verschiedenen Nullstellen gefunden haben, können wir sofort zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL (5) ablesen:

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = e^{-t}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist der Span von ihnen:

$$x_h(t) = \mu_1\, x_1(t) + \mu_2\, x_2(t) = \mu_1\, e^t + \mu_2\, e^{-t}$$

(iii) Zeigen Sie, dass durch $x_p(t) := -\frac{1}{2}\sin(t)$ eine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung (3) gegeben ist.

Lösung:
Wir berechnen die Ableitungen von x_p:

$$\frac{dx_p}{dt}(t) = -\frac{1}{2}\cos(t), \quad \frac{d^2x_p}{dt^2}(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$$

Wir setzen dies in die DGL ein:

$$\frac{d^2x_p}{dt^2}(t) - x_p(t) = \frac{1}{2}\sin(t) - (-\frac{1}{2}\sin(t)) = \sin(t)$$

Daraus lesen wir ab, dass x_p tatsächlich die inhomogene DGL (3) erfüllt.

(iv) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **inhomogenen** Differentialgleichung (3).

Lösung:
Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL (3) ist die Summe aus der Lösungsgesamtheit der homogenen DGL und *einer* Lösung der inhomogenen DGL. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL haben wir in (ii) bestimmt. In (iii) haben wir gezeigt, dass x_p *einer* Lösung der inhomogenen DGL ist. Damit erhalten wir als Lösungsgesamtheit der inhomoegnen DGL:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \mu_1\, e^t + \mu_2\, e^{-t} - \frac{1}{2}\sin(t) \tag{10}$$

(v) Lösen Sie das Anfangswertproblem (3), (4).

Lösung:
Wir berechnen die Ableitung der allgemeinen Lösung (10):

$$\frac{dx}{dt}(t) = \mu_1\, e^t - \mu_2\, e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)$$

Nun setzen wir die Anfangsbedingungen ein:

$$\begin{aligned} 0 &= x(0) = \mu_1 + \mu_2 \\ \frac{1}{2} &= \frac{dx}{dt}(0) = \mu_1 - \mu_2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 - \mu_2 &= 1 \end{aligned}$$

Seine eindeutige Lösung liest man ab zu:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \qquad \mu_2 = -\frac{1}{2}$$

Dies setzen wir in die allgemeine Lösung (10) ein und erhalten als Lösung des Anfangswertproblems (3), (4):

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t} - \sin(t)) = \sinh(t) - \frac{1}{2}\sin(t)$$