# 1 Lösungen Verständnisteil A

## 1.1 Aufgabe 1

1. Eigenwerte von $A$. Entweder: Durch Verwenden des Tipps sieht man, dass $A$ eine Drehmatrix ist. Also hat $A$ als Drehung um 45° nur den reellen Eigenwert +1, der zur Drehachse gehört. Alternativ:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2}-\lambda & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\left[(1/\sqrt{2}-\lambda)^2 + 1/2\right] \\
&= (1-\lambda)(1-\sqrt{2}\lambda+\lambda^2) \\
&\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = 1/\sqrt{2} \pm \sqrt{1/2-1}
\end{aligned}$$

   Da die Wurzel negativ ist, ist nur $\lambda = 1$ reeller Eigenwert, alle weiteren sind nicht gefragt.

2. Eigenvektoren von $A$. Entweder: $A$ ist eine Drehmatrix, die um die $x$-Achse dreht. Also sind $\vec{e}_x = \lambda(1,0,0)^T$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alle Eigenvektoren, da nur die Drehachse invariant gelassen wird. Alternativ: Berechne den Kern von $A - E_3$, also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2}-1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}-1 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/\sqrt{2}-1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2}-1+1/2\frac{1}{1/\sqrt{2}-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Also gilt für die Eigenvektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$: $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ und $x_1$ beliebig $\neq 0$. Somit haben wir die gleiche Lösung wie oben.

3. Orthogonalität. Entweder: $A$ ist eine Drehmatrix und damit längen-

und winkelerhaltend, also orthongonal. Alternativ:

$$\begin{aligned}
AA^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2+1/2 & 1/2-1/2 \\ 0 & -1/2+1/2 & 1/2+1/2 \end{pmatrix} = E_3
\end{aligned}$$

Also ist $A$ orthogonal.

4. Determinante von $A$. Entweder: $A$ ist eine Drehmatrix und muss deswegen die Determinante 1 haben. Alternativ:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1 \cdot (1/2 + 1/2) = 1$$

5. Inverse von $A$. Entweder: $A$ ist eine Drehung um 45°, also ist die Inverse eine Drehung in die entgegengesetzte Richtung. Oder: $A$ ist orthogonal, also ist die Inverse $A^T$. Oder:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2}-1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{array}\right)$$

Also $A^{-1} = A^T$.

## 1.2 Aufgabe 2

1. **Richtig** $D_z$ ist Drehung, also invertierbar.
2. **Richtig** Addition ist kommutativ.
3. **Falsch** Drehungen um verschiedene Achsen vertauschen nicht.
4. **Falsch** Da $\lambda = 1$ Eigenwert von Drehungen ist, muss $\det(D_z - E_3) = 0$ sein.

## 1.3 Aufgabe 3

1. Kern bestimmen mit Gauß:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & b & 0 \\ 0 & 2-b & 0 \end{array}\right)$$

   Ist in Dreiecksgestalt. Fallunterscheidung $b = 2$ und $b \neq 2$ :

   - $b = 2$: Aus der zweiten Gleichung folgt nichts, die erste Gleichung sagt $2x_1 + 2x_2 = 0$. Also

$$\mathrm{kern} A = \left\{\vec{x} | \vec{x} = \lambda(-1,1)^T, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\right\}$$

   - $b \neq 2$: Aus der zweiten Gleichung folgt dann $x_2 = 0$, und damit aus der ersten Gleichung $x_1 = 0$. Also

$$\mathrm{kern} A = \{\vec{0}\}$$

2. Die Lösung des homogene Gleichungssystems ist der Kern von $A$. Also haben wir unendlich viele Lösungen nur für $b = 2$.
3. Für den Fall $b = 2$ lösen wir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

   Die letzte Zeile ist ein Widerspruch, also hat dieses Gleichungssystem keine Lösungen.

## 1.4 Aufgabe 4

1. Linearität: Es ist

$$
\begin{aligned}
T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   und weiterhin für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
T\left[\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} \\
= \lambda\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \lambda T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   Also ist $T$ linear.

2. $T^2$ und $T^{-1}$. Entweder: Da Anwenden von $T$ eine Matrix transponiert, ist $T^2(A) = T(T(A)) = (A^T)^T = A$ also ist $T^2 = \mathrm{id}$. Oder:

$$
\begin{aligned}
T^2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   also ist $T^2(A) = A$ für alle $A$. Damit ist $T \circ T = \mathrm{id}$, was genau die definierende Eigenschaft der Inversen ist. Also ist $T^{-1} = T$.

3. Kern: Entweder: Da $T$ invertierbar ist, kann es als Kern nur die Nullmatrix haben. Alternativ:

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
\overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \quad a = b = c = d = 0. \\
\Rightarrow \quad \ker T &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

4. Darstellende Matrix: Die Spalten der darstellenden Matrix bestehen aus den Koordinaten der Bilder der gewählten Basis bezüglich dieser Basis. Also berechne zunächst die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{aligned}
T\vec{e}_1 &= T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 \\
T\vec{e}_2 &= T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 \\
T\vec{e}_2 &= T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 \\
T\vec{e}_4 &= T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_4 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 1\vec{e}_4
\end{aligned}$$

Die Spalten der Darstellungsmatrix $M$ bestehen nun aus den Koordinaten der Bilder bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, also

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$