1 Lösungen Verständnisteil B

1.1 Aufgabe 1

1. Kern bestimmen mit Gauß:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & b & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-3 & 0 \end{array}\right)$$
Ist in Dreiecksgestalt. Fallunterscheidung $b = 3$ und $b \neq 3$:
   - $b = 3$: Aus der zweiten Gleichung folgt nichts, die erste Gleichung sagt $1x_1 + 3x_2 = 0$. Also
   $$\text{kern}A = \left\{\vec{x}|\vec{x} = \lambda(-3,1)^T, \lambda \in \mathbb{R} \text{ geeignet}\right\}$$
   - $b \neq 3$: Aus der zweiten Gleichung folgt dann $x_2 = 0$, und damit aus der ersten Gleichung $x_1 = 0$. Also
   $$\text{kern}A = \{\vec{0}\}$$
2. Die Lösung des homogene Gleichungssystems ist der Kern von A. Also haben wir unendlich viele Lösungen nur für $b = 3$.
3. Für den Fall $b = 3$ lösen wir:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$
Die letzte Zeile ist ein Widerspruch, also hat dieses Gleichungssystem keine Lösungen.

1.2 Aufgabe 2

1. Eigenwerte von A. Entweder: Durch Verwenden des Tipps sieht man, dass A eine Drehmatrix ist. Also hat A als Drehung um 30° nur den reellen Eigenwert +1, der zur Drehachse gehört. Alternativ:
$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} - \lambda & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\left[(1/2\sqrt{3} - \lambda)^2 + 1/4\right] \\ &= (1-\lambda)(1 - \sqrt{3}\lambda + \lambda^2) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = 1/2\sqrt{3} \pm \sqrt{3/4 - 1} \end{aligned}$$

Da die Wurzel negativ ist, ist nur $\lambda = 1$ reeller Eigenwert, alle weiteren sind nicht gefragt.

2. Eigenvektoren von A. Entweder: A ist eine Drehmatrix, die um die z-Achse dreht. Also sind $\vec{e}_z = \lambda(0,0,1)^T$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alle Eigenvektoren, da nur die Drehachse invariant gelassen wird. Alternativ: Berechne den Kern von $A - E_3$, also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2\sqrt{3}-1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2\sqrt{3}-1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{3}+1/4\frac{1}{1/2\sqrt{3}-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also gilt für die Eigenvektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und x_3 beliebig, $\neq 0$. Somit haben wir die gleiche Lösung wie oben.

3. Orthogonalität. Entweder: A ist eine Drehmatrix und damit längen- und winkelerhaltend, also orthongonal. Alternativ:

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/4+1/4 & 1/4\sqrt{3}-1/4\sqrt{3} & 0 \\ -1/4\sqrt{3}+1/4\sqrt{3} & 1/4+3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \end{aligned}$$

Also ist A orthogonal.

4. Determinante von A. Entweder: A ist eine Drehmatrix und muss deswegen die Determinante 1 haben. Alternativ:

$$\det \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (3/4 + 1/4) = 1$$

5. Inverse von A. Entweder: A ist eine Drehung um 30°, also ist die Inverse eine Drehung in die entgegengesetzte Richtung. Oder: A ist orthogonal,

also ist die Inverse A^T. Oder:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 & 3/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also $A^{-1} = A^T$.

1.3 Aufgabe 3

1. **Richtig** Addition ist kommutativ.
2. **Richtig** Drehachse ist senkrecht zur Spiegelebene.
3. **Richtig** Inverse ist Spiegelung selbst.
4. **Falsch** Da $\lambda = -1$ Eigenwert von Spiegelungen ist, muss $\det(S_{xz} + E_3) = 0$ sein.

1.4 Aufgabe 4

1. Linearität: Es ist

$$\begin{aligned} T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und weiterhin für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T\left[\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} \\ = \lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \lambda T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist T linear.

2. T^2 und T^{-1}. Entweder: Da Anwenden von T eine Matrix transponiert, ist $T^2(A) = T(T(A)) = (A^T)^T = A$ also ist $T^2 = \mathrm{id}$. Oder:

$$\begin{aligned} T^2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

also ist $T^2(A) = A$ für alle A. Damit ist $T \circ T = \mathrm{id}$, was genau die definierende Eigenschaft der Inversen ist. Also ist $T^{-1} = T$.

3. Kern: Entweder: Da T invertierbar ist, kann es als Kern nur die Nullmatrix haben. Alternativ:

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \quad a = b = c = d = 0. \\ \Rightarrow \quad \operatorname{kern} T &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

4. Darstellende Matrix: Die Spalten der darstellenden Matrix bestehen aus den Koordinaten der Bilder der gewählten Basis bezüglich dieser Basis. Also berechne zunächst die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} T\vec{e}_1 &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 \\ T\vec{e}_2 &= T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 \\ T\vec{e}_2 &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 \\ T\vec{e}_4 &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_4 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 1\vec{e}_4 \end{aligned}$$

Die Spalten der Darstellungsmatrix M bestehen nun aus den Koordinaten der Bilder bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, also

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$