Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Lübbecke, Mehrmann, Nabben, Schwandt, Seiler

WS 04/05
6. April 2005

April – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2+\beta \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Rang der Koeffizientenmatrix A und (in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$) den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$.

(b) Geben Sie in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$ an, ob das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ *eine eindeutige* Lösung / *keine* Lösung / *unendlich viele* Lösungen besitzt.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ in Abhängigkeit von β.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes der Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, an.

2. Aufgabe

11 Punkte

Sei $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad zwei.

(a) Überprüfen Sie, ob die Polynome

$$q_1(x) = -1, q_2(x) = x^2 - x, q_3(x) = x^2 + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$D : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \qquad p \mapsto p' + p$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$. Dabei bezeichnet p' die Ableitung von p nach x und

$$p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Aufgabe

9 Punkte

Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren (auch komplexe) von $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien

$$C = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Benutzen Sie das Standardskalarprodukt und die Standardnorm im $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Norm von $\vec{x}$.

(b) Berechnen Sie die Norm von $\vec{y} = C\vec{x}$.

(c) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

(d) Berechnen Sie $C^T C$.

(e) Ist C orthogonal?