Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 04/05

Lübbecke, Mehrmann, Nabben, Schwandt, Seiler 6. April 2005

April – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben seien $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 2$ Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{u}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ Eigenvektor von A ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_2.

(c) Sind die Vektoren $\vec{w}$ und $\vec{x}$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_3 = 6$?

(d) Geben Sie Matrizen S^{-1} und D an, so dass $A = S^{-1}DS$ gilt.
Die Matrix S braucht **nicht** angegeben werden!

(e) Geben Sie die Determinanten von D und A an.

2. Aufgabe 10 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit Kern(A) $= \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$ und $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $A\vec{u}$.

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen des Kerns von A und des Bildes von A.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A.

(d) Ist die lineare Abbildung $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ injektiv? Ist diese Abbildung bijektiv?

(e) Es gilt $A\vec{v} = \vec{w}$. Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{w}$ an.

3. Aufgabe 11 Punkte

Begründen Sie jeweils, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

(b) $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

(c) $L_3 : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \quad L_3(p) = p' + p$

4. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie: Das Volumen des von den Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds (auch Spat genannt) hat den Wert 3.

(b) Sind die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ linear unabhängig?

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit $\det A = 4$. Geben Sie das Volumen des von den Vektoren $A\vec{v}, A\vec{w}, A\vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds an.

(d) Sei $Q \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine orthogonale Matrix. Die Antworten auf folgende Fragen brauchen Sie **nicht zu begründen**!

(i) Der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sei α. Wie groß ist der Winkel zwischen $Q\vec{v}$ und $Q\vec{w}$?
(ii) Es gilt $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$. Wie groß ist die Norm von $Q\vec{v}$?
(iii) Ist Q invertierbar? Geben Sie gegebenfalls die Inverse an!
(iv) Welche Werte kann die Determinante von Q annehmen?