Rechenteil

(mit Angabe von Alternativen)

1. Aufgabe [10 Punkte]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{2I+II, 3I+III}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} \overset{II<->III}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\overset{I-III, II-3III}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ NZSF

(b) Die gleichen Umformungen an $\vec{b}$ wie an A $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

liefern $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Daraus folgt $x_1 = 0$, $x_2 = -3x_4$, $x_3 = 1$, x_4 freier Parameter.

Das liefert die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -3\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Alternativ: Benutze, dass sich die Lösungsmenge zusammensetzt aus spezieller Lösung und Kern.

Da $\vec{b}$ gleich der dritten Spalte von A ist, ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eine spezielle Lösung.

Basis von Kern(A) nach Algorithmus: x_4 ist NK-Variable (s. NZSF). Setze $x_4 = 1$, dann ist $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$. Also $Kern(A) = span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Zusammen folgt $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) Da 'Lösungsmenge gleich spezielle Lösung plus Kern', kann der Kern von A aus der Lösungsmenge in (b) ermittelt werden.

Also $Kern(A) = span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Alternativ: Kern aus Algorithmus Basis des Kerns; Berechnung erfolgte schon in (b); Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$ berechnen.

(d) Benutze Algorithmus: Eine Basis des Bildes besteht aus den Spalten von A, die in (N)ZSF Kopfvariablen enthalten. Hier sind Kopfvariablen in Spalte 1,2,3 (siehe (a)).

Also ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des Bildes.

Alternativ ('alter Algorithmus') kann man A transponieren und auf ZSF bringen. Transposition der Nichtnullzeilen liefert eine Basis des Bildes von A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ZSF.}$$

Also eine Basis des Bildes: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Aufgabe [9 Punkte]

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

liefert ein LGS für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{I-II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-2II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ZSF}$$

Daraus folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Weil die obige Linearkombination nur die triviale Lösung hat, sind die drei Marizen linear unabhängig.

(b) Die vier Vektoren bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, falls

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

für jeden Vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist. Das zugehörige LGS

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow{I-III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-c \end{array}\right] \xrightarrow{II+III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b-c \end{array}\right]$$

ist nicht lösbar für $a+b-c \neq 0$. Also bilden die vier Vektoren kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.

Alternativ kann man auch ein Gegenbeispiel angeben.

3. Aufgabe [9 Punkte]

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\|A_1\|}A_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\langle A_1, A_1\rangle}}A_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\rangle}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2 &= A_2 - \langle A_2, B_1\rangle B_1 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix}\rangle \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - (0 \cdot 3/5 + 5 \cdot 4/5) \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{\|L_2\|}L_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\langle \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix}\rangle}} \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{144}{25} + \frac{81}{25}}} \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{225}{25}}} \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{225}} \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{bmatrix} -12/5 & 0 \\ 0 & 9/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Also ONB $\left\{ \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Aufgabe [12 Punkte]

(a) Eine Matrix ist diagonalisierbar, falls algebraische und geometrische Vielfachheit **für alle** Eigenwerte gleich sind (oder alternativ: eine Basis aus Eigenvektoren existiert).

Eigenwerte (Nullstellen char. Pol.) berechnen:

$$
p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1]
$$

$= (2-\lambda)[1-2\lambda+\lambda^2-1] = (2-\lambda)\lambda(\lambda-2) = -\lambda(2-\lambda)^2 \quad (p_A(\lambda) = -\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda)$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ mit algebraischen Vielfachheiten 1 bzw. 2.

geometrische Vielfachheiten (d.h. Dimensionen Eigenräume):

$\lambda_2 = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Da es zwei Nichtkopfvariablen gibt, hat der Eigenraum eine *Basis aus 2 Elementen*

(nämlich wegen $x_1 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1; x_1 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ z.B. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$),

d.h. die *geometrische Vielfachheit ist 2.*

Da $1 \leq$ geom.Vfh. $\leq$ alg.Vfh. gilt, hat der Eigenwert $\lambda_1 = 0$ die *geom. Vfh. 1.*

Alternativ kann man die Dimension des Eigenraums von λ_1 aus folgender Rechnung ablesen:

$A - 0I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 Nichtkopfvariable ($x_3 = 1 \to x_2 = -1, x_1 = -1$

liefert *einen Basisvektor* z.B. $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$), also geometrische Vielfachheit 1.

Es ist also für den Eigenwert 0 die alg.V. und die geom. V. 1 und für den Eigenwert 2 die alg. V. und die geom. V. 2. Da für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen , ist A diagonalisierbar.

Alternativ kann man auch begründen, dass eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren gefunden wurde, A also deshalb diagonalisierbar ist.

(b) Die Formel für die Lösung eines AWP lautet $\vec{y}(t) = Se^{tD}S^{-1}\vec{y}_0$. Dabei besteht S aus einer Basis aus Eigenvektoren, die aus Teil (a) abgelesen oder hier berechnet werden :

z.B. $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zugehörige Diagonalmatrix $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Berechnung S^{-1}: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$

Also

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & e^{2t} & -1 \\ e^{2t} & 0 & -1 \\ e^{2t} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}-1 \\ e^{2t}-1 \\ e^{2t}+1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$