Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 08
M. Huber/R. Nabben/K. Roegner 23.07.2008

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es keine Punkte!

1. Aufgabe

9 Punkte

Eine lineare Abbildung ist gegeben durch $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \vec{x} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}$.

(a) Welche Eigenwerte hat die Abbildung L?

(b) Ist L diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Kern}\,(L))$ und $\dim(\mathrm{Bild}\,(L))$.

(d) Ist L eine bijektive Abbildung?

2. Aufgabe

10 Punkte

Sei $F : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ die lineare Abbildung, die definiert ist durch:

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x^2 + 3x \qquad F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2x + 4$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = x + 2 \qquad F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -3x^2 + 9x$$

(a) Bestimmen Sie $F\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Bestimmen Sie **zwei** Elemente von $\mathrm{Kern}\,(F)$.

(c) Ist F eine invertierbare Abbildung?

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Basis $\mathcal{C} := \left\{ \vec{c}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{c}_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{c}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$, der mit dem Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ausgestattet ist. Das Gram-Schmidt-Verfahren angewendet auf $\mathcal{C}$ ergibt die Orthonormalbasis $\mathcal{Q} := \left\{ \vec{q}_1 := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{q}_2 := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{q}_3 := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Ferner sei $Q := [\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3]$.

(a) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu Q.

(b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $C := [\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3]$.

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Q\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ sind zu einander orthogonal. Bestimmen Sie $\langle Q\vec{v}_1, Q\vec{v}_2 \rangle$.

4. Aufgabe

11 Punkte

Prüfen Sie, ob es sich bei den gegebenen Mengen M_1, M_2, M_3 um Teilräume des $\mathbb{R}^{2,2}$ handelt.

$$M_1 := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \dim(\mathrm{Kern}(A)) = 0 \right\}$$

$$M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a, b, c, d \text{ sind ganze Zahlen} \right\}$$

$$M_3 := \left\{ B \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; B \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$