Lösung zur Februar-Klausur (Rechenteil, Aufgabe 1)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. **(10 Punkte)** Gegeben ist die Matrix $A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ sowie der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix zu dem zugehörigen linearen Gleichungssystem (LGS) $A\vec{x} = \vec{b}$ auf, und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform.
   b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.
   c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A.
   d) Bestimmen Sie $\text{Bild}(A)$.

(a) Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

Normierte Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

(b)

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 8-4s \\ t \\ 3-3s \\ s \\ 4 \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}..$$

(c) Der Kern ist die Lösungsmenge des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$, die sich aus b) ablesen lässt. Man erhält

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}(A)} := \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Die Spalten, in denen in der NZSF von A Kopfvariablen stehen, bilden eine Basis des Bildes von A. Also ist

$$\text{Bild}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

Lösung zur Februar-Klausur (Rechenteil, Aufgabe 2)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

2. **(9 Punkte)** Gegeben ist die Matrix $B := \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.
b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von B.
c) Ist die Matrix B diagonalisierbar?

(a) **(4 Punkte)**

Es ist

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 9 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix},$$

also

$$\text{char}B = \det(B - \lambda I) = (5-\lambda)(-1-\lambda) + 9 = -5 - 4\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

$p - q-$Formel oder Ablesen ergibt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

(b) **(3 Punkte)**

Es ist

$$B - 2I = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lösung des homogenen LGS:

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Menge aller Eigenvektoren ist also

$$\left\{ s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} | s \in \mathbb{R} \setminus \{\vec{0}\} \right\}.$$

(c) **(2 Punkte)**

Die alg. Vielfachheit von $\lambda = 2$ ist 2, geometrische Vielfachheit von $\lambda = 2$ ist 1, also stimmen sie nicht überein. Also ist B nicht diagonalisierbar.

Lösung zur Februar-Klausur (Rechenteil, Aufgabe 3)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

3. **(11 Punkte)**

a) Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ sind **bereits orthonormiert**.
Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf $\mathcal{B}$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis zu überführen.

b) Das Gram-Schmidt-Verfahren angewendet auf die Basis $\mathcal{C} := \left\{ \vec{c}_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{c}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ führt zu der Orthonormalbasis $\mathcal{C}_{\text{ONB}} := \left\{ \vec{q}_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{q}_2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$.

i) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}_{\text{ONB}}$.

ii) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $C := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Es ist $\vec{q}_1 = \vec{b}_1, \vec{q}_2 = \vec{b}_2$, da die Vektoren bereits orthonormiert sind. Orthogonalisierungsansatz für den dritten Vektor :

$$\vec{\ell}_3 = \vec{b}_3 - \langle \vec{b}_3, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 - \langle \vec{b}_3, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{5}, \qquad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{7}{5}.$$

ergibt sich der orthogonalisierte Vektor zu

$$\vec{\ell}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{7}{5} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Normierung:

$$||\vec{\ell}_3|| = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_3 = \frac{\vec{\ell}_3}{||\vec{\ell}_3||} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Also ist

$$\mathcal{B}_{ONB} = \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{q}_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) i) Mit

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \ = \ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ist

$$K_{\mathcal{C}}(v) = Q^T v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Also ist

$$K_{\mathcal{C}}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) ii) Es ist $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, und

$$R = Q^T C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Lösung zur Februar-Klausur (Rechenteil, Aufgabe 4)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

4. **(10 Punkte)** Gegeben ist der Vektorraum V der reellen oberen Dreiecksmatrizen sowie die Basis $\mathcal{D} := \left\{ \vec{d}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{d}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{d}_3 := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ von V.

a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis $\mathcal{D}$.

b) Bestimmen Sie $K_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

c) Sei L die lineare Abbildung $L : V \to V; \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a+b & c \\ 0 & b-c \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{D}}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{D}$.

(a) Ansatz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Der Ansatz führt auf das LGS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 2 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right]$$

Es ergibt sich der Koordinatenvektor

$$K_{\mathcal{D}}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{a+2c}{3} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{a-c}{3} \end{bmatrix}.$$

(b)

$$K_{\mathcal{D}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Berechnung der Bilder der Basisvektoren:

$$L(\vec{d}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad L(\vec{d}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad L(\vec{d}_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnung der Koordinatenvektoren von $L(\vec{d}_i)$ bezüglich $\mathcal{D}$ (z.B. durch Ablesen aus (a)):

$$K_{\mathcal{D}}(L(\vec{d}_1)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{D}}(L(\vec{d}_2)) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{D}}(L(\vec{d}_3)) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Also ist

$$L_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$