Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS10
R. Nabben / C. Schröder 22.07.2010

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe 14 Punkte

Lösung:

a) **(3 Punkte)**
Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Nun überführen wir diese in die normierte Zeilenstufenform (NZSF)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[II \leftrightarrow III]{II+I} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[I-III]{II-2\cdot III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

b) **(2 Punkte)**
Anhand der NZSF sehen wir, x_1, x_2 und x_4 sind die Kopfvariablen und x_3 ist die frei wählbare Nichtkopfvariable. Setze also $x_3 = \alpha$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2\alpha \\ x_2 &= -4 - 4\alpha \\ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) **(2 Punkte)**
Da in der ersten, zweiten und vierten Spalte der NZSF die Köpfe stehen, bilden die erste, zweite und vierte Spalte der Matrix A die Basis von $\text{Bild}(A)$, also ist

$$\text{Basis}(\text{Bild}(A)) : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

d) **(2 Punkte)**
Durch die Matrixmultiplikation folgt: $m = 4$ und $n = 3$.

e) **(3 Punkte)**
Aus Aufgabenteil (b) kann man ablesen, dass

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Insbesondere ist $\text{Kern}(A) \neq \{\vec{0}\}$ und somit A nicht injektiv.

Weiter sieht man aus Aufgabenteil (c)

$$\dim \text{Bild}(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^3 = \text{Bildraum}).$$

Also ist A surjektiv.

Da A nicht injektiv ist, kann A auch nicht bijektiv sein.

f) **(2 Punkte)**

Da A surjektiv ist, ist $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$, also liegt auch $\begin{bmatrix} 78 \\ -78 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Bild}(A)$.

2. Aufgabe

10 Punkte

Lösung:

a) **(2 Punkte)**
Das charakteristische Polynom von B ist

$$P_B(z) = \det(B - zI) = \det\left(\begin{bmatrix} -5 - z & 2 \\ -15 & 6 - z \end{bmatrix}\right) = (-5 - z)(6 - z) + 30 = z^2 - z = z(z - 1).$$

b) **(2 Punkte)**
Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$.

c) **(2 Punkte)**
Damit $\vec{w}$ ein Eigenvektor von B ist, muss für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten $B\vec{w} = \lambda w$. Es ist

$$B\vec{w} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Also ist $\vec{w}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

d) **(2 Punkte)**

Da $\text{Kern}(B)$ ein Teilraum ist, ist $\vec{0} \in \text{Kern}(B)$. Desweiteren gilt $B \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \vec{0}$, somit ist $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(B)$.

e) **(2 Punkte)**
Da der Startvektor w ein Eigenvektor von B ist, ist die Lösung gegeben durch

$$y(t) = e^{(t-3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(t-3)} \\ 3e^{(t-3)} \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe

5 Punkte

Lösung:

Als mögliche Basis wählen wir

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Um zu überprüfen, ob $\mathcal{D}$ eine Basis ist, muss gezeigt werden, dass $\mathcal{D}$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist. Da bekannt ist, dass $\dim(V) = 3$, und $\mathcal{D}$ genau drei Elemente enthält, reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ linear unabhängig ist.

Betrachte also folgendes LGS

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme nun die Zeilenstufenform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[III-2II]{II-3I} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Also hat die Matrix vollen Rang, somit ist die einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und damit ist $\mathcal{D}$ linear unabhängig.

4. Aufgabe

12 Punkte

Lösung:

a) **(3 Punkte)**
FALSCH:
Betrachte $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A ist nicht invertierbar ($\det(A) = 0$), jedoch ist A bereits diagonal.

b) **(3 Punkte)**
FALSCH:
Betrachte $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hier ist $\det(B) = 2$. Die normierte Zeilenstufenform von B ist $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mit $\det(\tilde{B}) = 1$.

c) **(3 Punkte)**
WAHR:
Da $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Matrix C zum Eigenwert -3 ist, gilt $C\vec{v} = -3\vec{v}$. Also gilt auch

$$C^2\vec{v} = C(C\vec{v}) = C(-3\vec{v}) = (-3)(C\vec{v}) = (-3)(-3)\vec{v} = 9v.$$

Also ist 9 ein Eigenwert von C^2 zum Eigenvektor $\vec{v}$.

d) **(3 Punkte)**
FALSCH:
Betrachte $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dann ist $\det(D) = 1$, jedoch ist $DD^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Also ist D nicht orthogonal.

5. Aufgabe

12 Punkte

Lösung:

a) **(2 Punkte)**
Um S zu invertieren, betrachte Folgendes

$$[S|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I-2\cdot II} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [I|S^{-1}].$$

Also ist $S^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) **(2 Punkte)**
Es gilt

$$L_{\mathcal{B}} = S^{-1} L_{\mathcal{C}} S = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

c) **(5 Punkte)**

Die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{C}}$ ist gegeben durch $K_{\mathcal{C}}: \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2,\ ax+b \mapsto \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$,
wobei $ax+b = \alpha(x+1)+\beta(x-1) = (\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)$ ist. Durch Koeffizientenvergleich sieht man

$$a = \alpha+\beta \,\text{und}\, b = \alpha-\beta$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}\cdot II]{II-I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{I-II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{2} \end{array}\right]$$

Als Ergebnis erhält man $\alpha = \frac{a+b}{2}$ und $\beta = \frac{a-b}{2}$, also $K_{\mathcal{C}}(ax+b) = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{bmatrix}$.

Die Inverse erhalten wir durch $K_{\mathcal{C}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = c(x+1)+d(x-1) = (c+d)x + (c-d)$.

d) **(3 Punkte)**

Sei $\mathcal{B} = \{p,q\}$, dann gilt $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = p$ und $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = q$. Ausserdem ist $K_{\mathcal{B}}^{-1} = K_{\mathcal{C}}^{-1} \circ S$.
Somit ist

$$p = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(K_{\mathcal{C}}^{-1} \circ S\right)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{C}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2x,$$
$$q = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \left(K_{\mathcal{C}}^{-1} \circ S\right)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{C}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 5x-1.$$

Also ist $\mathcal{B} = \{2x, 5x-1\}$.

6. Aufgabe

7 Punkte

Lösung:

F_1: **(5 Punkte)**

F_1 ist linear. Wir zeigen, dass F_1 verträglich bzgl. der Addition und der Multiplikation ist.
Sei $ax+b, cx+d \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$F_1(ax+b+cx+d) = F_1((a+c)x+(b+d)) = \begin{bmatrix} a+c+3(b+d) & 0 \\ 0 & 2(a+c)-(b+d) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+3b & 0 \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+3d & 0 \\ 0 & 2c-d \end{bmatrix} = F_1(ax+b) + F_1(cx+d).$$

und

$$F_1(\lambda(ax+b)) = F_1(\lambda ax + \lambda b)) = \begin{bmatrix} \lambda a + 3\lambda b & 0 \\ 0 & 2\lambda a - \lambda b \end{bmatrix}$$
$$= \lambda \begin{bmatrix} a+3b & 0 \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix} = \lambda F_1(ax+b).$$

Also ist F_1 linear.

F_2: **(2 Punkte)**

F_2 ist nicht linear, da $F_2\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist.