Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
J. Liesen, R. Nabben, C. Schröder

SS 12
16.07.2012

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und die Vektoren $\vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}_1]$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}_1$.

(c) Sind die Spalten von A linear unabhängig?

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(A)$ und die Dimension von $\mathrm{Bild}(A)$.

(e) Gilt $\vec{b}_1 \in \mathrm{Bild}(A)$? Gilt $\vec{b}_2 \in \mathrm{Bild}(A)$?

(a) **(3 Punkte)**

$$[A|\vec{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{II+I}]{\text{III}-\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I+II}]{\text{I}-2\text{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(b) **(2 Punkte)**
$\mathrm{Rang}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{Rang}([A|\vec{b}_1])$, da nach a) zwei bzw. drei Köpfe in der NZSF von A bzw. $[A|\vec{b}_1]$. Die Lösungsmenge ist also $\mathcal{L} = \emptyset$.

(c) **(1 Punkte)**
$\mathrm{Rang}(A) = 2 < 3 =$ „Anzahl der Spalten von A“. Die Spalten von A sind folglich linear abhängig.

(d) **(3 Punkte)**
Da nach a) in der NZSF von A in der ersten und zweiten Spalte Köpfe sind, sind die ersten beiden Spaltenvektoren von A linear unabhängig und bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(A)$. Somit ist $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ und $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = 2$, da der Teilraum von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird.

(e) **(2 Punkte)**
Nach b) hat $A\vec{x} = \vec{b}_1$ keine Lösung. Somit ist $\vec{b}_1 \notin \mathrm{Bild}(A)$.
$\vec{b}_2$ ist der dritte Spaltenvektor von A und ist somit im Spann der Spalten von A enthalten, welche ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(A)$ bilden. Es gilt also $\vec{b}_2 \in \mathrm{Bild}(A)$.

---

2. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B von B.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten.

(c) Ist B diagonalisierbar?

(a) **(3 Punkte)**

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{1. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (3-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (3-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = -\lambda(3-\lambda)^2$$

(b) **(3 Punkte)**
Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_B: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = 3$. Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist 1, die von $\lambda_{2/3}$ 2, da λ_1 eine einfache und $\lambda_{2/3}$ eine doppelte Nullstelle von p_B ist.

(c) **(5 Punkte)**
B ist diagonalisierbar, falls die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit für alle Eigenwerte von B ist.
Die alg VFHen der Eigenwerte sind aus b) bekannt. Da für jeden Eigenwert die geom VFH kleiner gleich der alg VFH, aber mindestens 1 sein muss, ist die geom VFH von λ_1 gleich der alg VFH, nämlich 1.
Für $\lambda_{2/3}$ gilt:

$$\text{geom VFH }(\lambda_{2/3}) = \dim(V_{\lambda_{2/3}}) = \dim(\text{Kern}\,(B - 3I_3)) = \dim(\text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\right))$$

$$\underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{=}} \dim(\text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)) = 2, \text{ da zwei Spalten ohne Köpfe in einer ZSF.}$$

Also ist auch für $\lambda_{2/3}$ die alg VFH gleich der geom VFH und B somit diagonalisierbar.

---

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto (a+b)x - 2b$.

(a) Bestimmen Sie Kern(F).
(b) Ist F bijektiv?
(c) Ist F invertierbar? Falls F invertierbar ist, bestimmen Sie die zu F inverse Abbildung F^{-1}.

(a) **(3 Punkte)**
Für den Kern von F gilt: $\text{Kern}(F) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F(\vec{x}) = 0\right\}$.
$F\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = (a+b)x - 2b = 0x + 0$
Koeffizientenvergleich ergibt das LGS: $a + b = 0$ und $-2b = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $b = 0$ und dies in die erste eingesetzt, führt zu $a = 0$.
Somit gilt: $\text{Kern}(F) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

(b) **(3 Punkte)**
F ist injektiv, da nach a) $\text{Kern}(F) = \left\{\vec{0}\right\}$.
Aus dem Dimensionssatz folgt, dass $\dim(\text{Bild}(F)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\text{Kern}(F)) = 2 - 0 = 2$. Also gilt $\dim(\text{Bild}(F)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ und F ist somit auch surjektiv.
F ist bijektiv, da injektiv und surjektiv.

(c) **(4 Punkte)**
F ist invertierbar, da nach b) bijektiv.
$F^{-1} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2$ mit $ax + b \mapsto \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ wobei gilt: $F(F^{-1}(ax+b)) = ax + b$.
$F(F^{-1}(ax+b)) = F\left(\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}\right) = (m+n)x - 2n = ax + b$
Koeffizientenvergleich ergibt folgendes LGS: $m + n = a$ und $-2n = b$. Aus der zweiten Gleichung folgt $n = -\frac{b}{2}$ und dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $m = a + \frac{b}{2}$.
Also ist $F^{-1}(ax+b) = \begin{bmatrix} a + \frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{bmatrix}$.

---

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, von der Folgendes bekannt ist:

$$G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $G_\mathcal{B}$ von G bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$.

(b) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren von G zu den Eigenwerten -1 bzw. -2 sind.

(c) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = G\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) **(6 Punkte)**

Für die i-te Spalte von $G_\mathcal{B}$ gilt: $G_\mathcal{B}(\vec{e}_i) = K_\mathcal{B}(G(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_i))$.

$$G_\mathcal{B}(\vec{e}_1) = K_\mathcal{B}(G(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_1)) = K_\mathcal{B}(G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G_\mathcal{B}(\vec{e}_2) = K_\mathcal{B}(G(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_2)) = K_\mathcal{B}(G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$
$$K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G_\mathcal{B}(\vec{e}_3) = K_\mathcal{B}(G(K_\mathcal{B}^{-1}(\vec{e}_3)) = K_\mathcal{B}(G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)) = K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = K_\mathcal{B}\left(3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$
$$3K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - K_\mathcal{B}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Also ist die darstellende Matrix von G bzgl. $\mathcal{B}$: $G_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) **(4 Punkte)**

$G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Also ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert -1.

$$G\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{lin.}}{=} G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Also ist $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert -2.

(c) **(2 Punkte)**

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind nach b) Eigenvektoren von G. Da gilt $1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{y}_0$,

ist $\vec{y}_0$ als Linearkombmination von Eigenvektoren von G darstellbar. Für $\vec{y}(t)$ gilt dann:

$$\vec{y}(t) = 1e^{-1(t-3)}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1e^{-2(t-3)}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3-t} - 2e^{6-2t} \\ e^{3-t} - e^{6-2t} \\ e^{6-2t} \end{bmatrix}.$$

---

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\rangle_s := \frac{1}{2}a_1b_1 + \frac{1}{8}a_2b_2\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ bzgl. des gegebenen Skalarprodukts $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_s$ normiert ist.

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, sodass $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v} \right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_s$ ist. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\frac{1}{17}\vec{v}$ bzgl. der Basis $\mathcal{C}$.

(c) Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{z} := \vec{y} - \frac{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle_s}{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle_s}\vec{x}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Eigenschaften eines euklidischen Skalarprodukts, dass die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{z}$ orthogonal sind bzgl. $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_s$.

(a) **(1 Punkte)**
$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ist bzgl. $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_s$ normiert, falls gilt: $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle_s = 1$.
$\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle_s = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{8}(-2)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

(b) **(4 Punkte)**
$\mathcal{C}$ ist orthonormal bzgl. $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_s$, falls die Vektoren in $\mathcal{C}$ jeweils normiert und orthogonal sind. Nach a) ist $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ normiert. Weiter muss gelten für $\vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$:
$\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rangle_s = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{8}(-2)v_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 = 0$ und
$\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rangle_s = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{8}v_2^2 = 1$
Aus der ersten Gleichung folgt $v_1 = \frac{1}{2}v_2$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v_2\right)^2 + \frac{1}{8}v_2^2 = 1 \Leftrightarrow v_2 = \pm 2$. Für $v_2 = 2$ ist dann $v_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Somit ist $\mathcal{C}$ z.B. für $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_s$.
Der gesuchte Koordinatenvektor ist: $\left(\frac{1}{17}\vec{v}\right)_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{17} \end{bmatrix}$, da $0\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{17}\vec{v} = \frac{1}{17}\vec{v}$.

(c) **(3 Punkte)**
$\vec{x}$ und $\vec{z}$ sind orthogonal, falls gilt $\langle \vec{x}\,,\,\vec{z} \rangle_s = 0$.
$\langle \vec{x}\,,\,\vec{z} \rangle_s \underset{\text{nach Aufg.}}{=} \langle \vec{x}\,,\,\vec{y} - \frac{\langle \vec{y},\vec{x} \rangle_s}{\langle \vec{x},\vec{x} \rangle_s}\vec{x} \rangle_s$
$\underset{\text{additiv}}{=} \langle \vec{x}\,,\,\vec{y} \rangle_s - \langle \vec{x}\,,\,\frac{\langle \vec{y},\vec{x} \rangle_s}{\langle \vec{x},\vec{x} \rangle_s}\vec{x} \rangle_s$
$\underset{\text{homogen}}{=} \langle \vec{x}\,,\,\vec{y} \rangle_s - \frac{\langle \vec{y},\vec{x} \rangle_s}{\langle \vec{x},\vec{x} \rangle_s}\langle \vec{x}\,,\,\vec{x} \rangle_s = \langle \vec{x}\,,\,\vec{y} \rangle_s - \langle \vec{y}\,,\,\vec{x} \rangle_s$
$\underset{\text{symmetr.}}{=} \langle \vec{x}\,,\,\vec{y} \rangle_s - \langle \vec{x}\,,\,\vec{y} \rangle_s = 0$

---

6. Aufgabe

8 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $M := \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, \det(A) = 1\right\}$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) Gegeben sei der Teilraum $N := \left\{\begin{bmatrix} 2a & b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$ des $\mathbb{R}^{2,2}$.

(i) Prüfen Sie, ob $\mathcal{B}_1 := \left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ eine Basis von N ist.

(ii) Prüfen Sie, ob $\mathcal{B}_2 := \left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ eine Basis von N ist.

(a) **(2 Punkte)**
$I_2 \in M$, da $\det(I_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, aber $0I_2 \notin M$, da $\det(0I_2) = \det(0) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 \neq 1$.
M ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$, da nicht abgeschlossen bzgl. Skalarmultiplikation.

(b) **(6 Punkte)**

(i) $\mathcal{B}_1 \not\subseteq N$, da $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin N$. Aus $\begin{bmatrix} 2a & b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ folgen durch Komponentenvergleich: $2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $b = 1$ und $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$. Die zweite in die dritte Gleichung eingesetzt ergibt $a = 1$. Dies ist ein Widerspruch zur ersten Gleichung. Somit ist $\mathcal{B}_1$ keine Basis von N, da kein Erzeugendensystem.

(ii) Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. $\mathcal{B}_2$ ist linear unabhängig, da die beiden Matrizen in $\mathcal{B}_2$, keine Vielfachen voneinander sind. $\mathcal{B}_2$ ist ein Erzeugendensystem von N, falls $\operatorname{span}\mathcal{B}_2 = N$:
$\operatorname{span}\mathcal{B}_2$
$= \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$
$= \left\{\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$
$= \left\{\begin{bmatrix} 2(\alpha_1 + \alpha_2) & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$
$= \left\{\begin{bmatrix} 2a & b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$ (mit $a := \alpha_1 + \alpha_2$ und $b := \alpha_2$)
$= N$
Also ist $\mathcal{B}_2$ eine Basis von N.